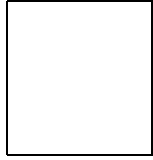


# Examen de Cálculo 2

Viernes 27 de febrero de 2009.



Apellido y Nombre

Cédula de Identidad

No. Examen

## Ejercicios de múltiple opción (total 50 puntos).

Puntaje: Correctas: 10 puntos; Incorrectas: - 2 puntos; Sin responder: 0 punto.

Duración: 3 horas y media.

### Ejercicio 1.

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Entonces:

- (A)  $f$  es de clase  $C^1$  pero no es diferenciable.
- (B)  $f$  no es de clase  $C^1$  pero es diferenciable.
- (C)  $f$  no es de clase  $C^1$  ni diferenciable pero es continua.
- (D)  $f$  es de clase  $C^1$  y es diferenciable.
- (E)  $f$  no es continua.

### Ejercicio 2.

Sea  $g : [-2, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = (x - y)e^{x+y}$ .

- (A)  $g$  tiene máximo (que es  $e$ ), pero no tiene mínimo.
- (B)  $g$  tiene máximo y mínimo, son  $e$  y  $-e$ .
- (C)  $g$  tiene mínimo (que es  $-e$ ), pero no máximo.
- (D)  $g$  tiene máximo y mínimo, son  $e$  y  $-1/e$ .
- (E)  $g$  no tiene máximo ni mínimo.

### Ejercicio 3.

Se considera la función  $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}$  y el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Entonces la integral  $\int \int_C f(x, y) dx dy$ :

- (A) converge a  $\frac{\pi}{4}$ .

- (B) converge a  $\frac{1}{3}$ .
- (C) converge a  $\frac{\pi}{2}$ .
- (D) diverge.
- (E) converge a 0.

### Ejercicio 4.

Se consideran las siguientes regiones del espacio:  $E_1$  limitada por la superficie definida por  $x^2 + y^4 + z^2 = 1$  y  $E_2$  limitada por la superficie definida por  $x^2 + y^3 + z^2 = 1$ , con  $y \geq 0$ . Entonces:

- (A) El volumen de  $E_1$  es  $\frac{4\pi}{5}$  y el de  $E_2$  es  $\frac{25\pi}{4}$ .
- (B) El volumen de  $E_1$  es  $\frac{8\pi}{5}$  y el de  $E_2$  es  $\frac{25\pi}{8}$ .
- (C) El volumen de  $E_1$  es  $\frac{8\pi}{3}$  y el de  $E_2$  es  $\frac{3\pi}{2}$ .
- (D) El volumen de  $E_1$  es  $\frac{4\pi}{5}$  y el de  $E_2$  es  $\frac{25\pi}{8}$ .
- (E) El volumen de  $E_1$  es  $\frac{8\pi}{5}$  y el de  $E_2$  es  $\frac{3\pi}{4}$ .

### Ejercicio 5.

Considere los conjuntos:

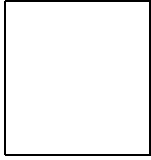
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x + y \geq 2\} \quad B = A \cap \mathbb{Q}^2,$$

donde  $B$  está formado por los elementos de  $A$  con ambas coordenadas racionales. Entonces:

- (A)  $B$  es compacto.
- (B)  $B$  es cerrado pero no acotado.
- (C)  $B$  es abierto.
- (D)  $\bar{A} = \bar{B}$ .
- (E)  $B^c$  es compacto.

## Examen de Cálculo 2

Viernes 27 de febrero de 2009.



No. Examen

Apellido y Nombre

Cédula de Identidad

**Ejercicios de desarrollo** (total 50 puntos).

### Ejercicio 1

Puntaje: 25 puntos.

1. Enunciar y demostrar el teorema de la función implícita (sólo demostrar la existencia) para una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ . Enunciar todos los resultados previos que se utilicen.
2. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 + 2y)(x^2 + y^2 - 2y).$$

Mostrar que no puede aplicarse el teorema de la función implícita en ningún entorno del punto  $(0,0)$ .  
Mostrar que existen cuatro funciones  $g_i : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que  $f(x, g_i(x)) = 0$  y  $g_i(0) = 0$  para  $i = 1, \dots, 4$ . Justificar que dichas funciones son de clase  $C^1$ .

### Ejercicio 2

Puntaje: 25 puntos.

1. Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  y  $a \in \mathbb{R}^n$ . Definir diferenciabilidad de  $g$  en el punto  $a$ .
2. Se considera la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y la función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x, y) = \int_0^x f(t, y) dt.$$

- a) Probar que  $f$  y  $F$  son continuas en  $(0,0)$ .
- b) Calcular en caso que existan las derivadas parciales de  $f$  y  $F$  en  $(0,0)$ .
- c) Probar que  $f$  no es diferenciable en  $(0,0)$  y probar que  $F$  es diferenciable en  $(0,0)$ .

En todos los casos enunciar los teoremas que se utilicen.