Examen de Cálculo 2

Viernes 27 de febrero de 2009.

Apellido y Nombre

Cédula de Identidad

No. Examen

Ejercicios de múltiple opción *(total 50 puntos).*

Puntaje: Correctas: 10 puntos; Incorrectas: - 2 puntos; Sin responder: 0 punto.

Duración: 3 horas y media.

Ejercicio 1.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Entonces:

(A) f es de clase C^1 pero no es diferenciable.

(B) f no es de clase C^1 pero es diferenciable.

(C) f no es de clase C^1 ni diferenciable pero es continua.

(D) f es de clase C^1 y es diferenciable.

(E) f no es continua.

Ejercicio 2.
Sea $g : [-2,1] \times [0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = (x-y)e^{x+y}$.

(A) g tiene máximo (que es e), pero no tiene mínimo.

(B) g tiene máximo y mínimo, son e y $-e$.

(C) g tiene mínimo (que es $-e$), pero no máximo.

(D) g tiene máximo y mínimo, son e y $-1/e$.

(E) g no tiene máximo ni mínimo.

Ejercicio 3.
Se considera la función $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2-1}$ y el subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Entonces la integral $\int\int_C f(x,y)dxdy$:

(A) converge a $\dfrac{\pi}{4}$.

(B) converge a $\dfrac{1}{3}$.

(C) converge a $\dfrac{\pi}{2}$.

(D) diverge.

(E) converge a 0.

Ejercicio 4.
Se consideran las siguientes regiones del espacio: E_1 limitada por la superficie definida por $x^2+y^4+z^2=1$ y E_2 limitada por la superficie definida por $x^2+y^3+z^2=1$, con $y \geq 0$. Entonces:

(A) El volumen de E_1 es $\dfrac{4\pi}{5}$ y el de E_2 es $\dfrac{25\pi}{4}$.

(B) El volumen de E_1 es $\dfrac{8\pi}{5}$ y el de E_2 es $\dfrac{25\pi}{8}$.

(C) El volumen de E_1 es $\dfrac{8\pi}{3}$ y el de E_2 es $\dfrac{3\pi}{2}$.

(D) El volumen de E_1 es $\dfrac{4\pi}{5}$ y el de E_2 es $\dfrac{25\pi}{8}$.

(E) El volumen de E_1 es $\dfrac{8\pi}{5}$ y el de E_2 es $\dfrac{3\pi}{4}$.

Ejercicio 5.

Considere los conjuntos:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x+y \geq 2\} \qquad B = A \cap \mathbb{Q}^2,$$

donde B está formado por los elementos de A con ambas coordenadas racionales. Entonces:

(A) B es compacto.

(B) B es cerrado pero no acotado.

(C) B es abierto.

(D) $\bar{A} = \bar{B}$.

(E) B^c es compacto.

Examen de Cálculo 2

Viernes 27 de febrero de 2009.

Apellido y Nombre

Cédula de Identidad

No. Examen

Ejercicios de desarrollo *(total 50 puntos).*

Ejercicio 1
Puntaje: 25 puntos.

1. Enunciar y demostrar el teorema de la función implícita (sólo demostrar la existencia) para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Enunciar todos los resultados previos que se utilicen.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2 + 2y\right)\left(x^2 + y^2 - 2y\right).$$

   Mostrar que no puede aplicarse el teorema de la función implícita en ningún entorno del punto (0,0). Mostrar que existen cuatro funciones $g_i : (-1,1) \to \mathbb{R}$, tales que $f(x, g_i(x)) = 0$ y $g_i(0) = 0$ para $i = 1, \ldots, 4$. Justificar que dichas funciones son de clase C^1.

Ejercicio 2
Puntaje: 25 puntos.

1. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Definir diferenciabilidad de g en el punto a.

2. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   y la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \int_0^x f(t,y)dt.$$

   a) Probar que f y F son continuas en $(0,0)$.

   b) Calcular en caso que existan las derivadas parciales de f y F en $(0,0)$.

   c) Probar que f no es diferenciable en $(0,0)$ y probar que F es diferenciable en (0,0).

En todos los casos enunciar los teoremas que se utilicen.