

EXAMEN VIERNES 11 DE DICIEMBRE DE 2009

1. a) Sea V un espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal y λ un valor propio de T . Defina multiplicidad geométrica ($mg(\lambda)$) y multiplicidad algebraica ($ma(\lambda)$) de λ .
b) Demuestre que $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.
c) Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$T(x, y, z) = (2x, 4x + 3y - z, -3x + y + 5z).$$

- i. Encuentre sus valores propios y subespacios propios.
ii. Justifique a partir de lo anterior, enunciando los resultados que utilice, si T es diagonalizable. Escriba la matriz de Jordan de T .
2. a) Sean V y W espacios vectoriales sobre \mathbb{C} o \mathbb{R} con producto interno. Pruebe que si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal que preserva la norma, entonces T preserva el producto interno.
b) Si $T : V \rightarrow V$ es una isometría, consideramos $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera de V (no necesariamente ortonormal) y $A = {}_B(T)_B$. Pruebe que
i. $|\det(A)| = 1$
ii. $|\operatorname{tr}(A)| \leq n$
c) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la isometría lineal que cumple que

$$N(T - \operatorname{Id}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$$

y que

$$\operatorname{tr}(T) = 1.$$

Calcule $T(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $S \subset V$ un subespacio.
a) Defina S^\perp y pruebe que $V = S \oplus S^\perp$.
b) Defina $P_S(v)$ y pruebe que $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, $\forall v \in V$.
c) Sea $V = M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$ y S el subespacio definido como

$$S = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

Halle $P_S(B)$ siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.