

SOLUCIONES RESUMIDAS DEL EXAMEN
VIERNES 11 DE DICIEMBRE DE 2009

1. a) Sea V un espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal y λ un valor propio de T . Defina multiplicidad geométrica ($mg(\lambda)$) y multiplicidad algebraica ($ma(\lambda)$) de λ .
Ver teórico.
- b) Demuestre que $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.
Ver teórico.
- c) Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$T(x, y, z) = (2x, 4x + 3y - z, -3x + y + 5z).$$

- i. Encuentre sus valores propios y subespacios propios.
El polinomio característico de T es $-(t-2)(t-4)^2$, los valores propios de T son 2 y 4 (doble) y los subespacios propios son $S_2 = [(4, -9, 7)]$ y $S_4 = [(0, -1, 1)]$.
- ii. Justifique a partir de lo anterior, enunciando los resultados que utilice, si T es diagonalizable. Escriba la matriz de Jordan de T .

Como las multiplicidades algebraicas y geométricas de 4 son distintas entonces T no puede ser diagonalizable. Como el polinomio característico de T se factoriza completamente y $mg(4) = 1$ entonces la forma de Jordan de T es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. a) Sean V y W espacios vectoriales sobre \mathbb{C} o \mathbb{R} con producto interno. Pruebe que si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal que preserva la norma, entonces T preserva el producto interno.

Ver teórico.

- b) Si $T : V \rightarrow V$ es una isometría, consideramos $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera de V (no necesariamente ortonormal) y $A = {}_B((T))_B$. Pruebe que

- i. $|\det(A)| = 1$

Sea $D = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base ortonormal de V . Como $A = {}_B((T))_B \sim C = {}_D((T))_D$ entonces basta con estudiar el determinante y la traza de $C = {}_D((T))_D$. Como T es una isometría y D es ortonormal entonces $C\bar{C}^t = I$ y por lo tanto $1 = \det(\bar{C}^t) \det(C) = \det(\bar{C}) \det(C) = \overline{\det(C)} \det(C) = |\det(C)|^2$, es decir $|\det(A)| = |\det(C)| = 1$

- ii. $|\operatorname{tr}(A)| \leq n$.

Como $c_{ij} = \langle T(w_i), w_j \rangle$ entonces $|c_{ii}| = |\langle T(w_i), w_i \rangle| \leq \|T(w_i)\| \|w_i\| = \|w_i\| \|w_i\| = \|w_i\|^2 = 1$. Por lo tanto $|\operatorname{tr}(A)| = |\operatorname{tr}(C)| = |c_{11} + \dots + c_{nn}| \leq |c_{11}| + \dots + |c_{nn}| \leq \underbrace{1 + \dots + 1}_n = n$

c) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la isometría lineal que cumple que

$$N(T - \text{Id}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$$

y que

$$\text{tr}(T) = 1.$$

Calcule $T(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

T es una simetría respecto del plano π definido por el subespacio $S_1 = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$

y

$$T(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \right)$$

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $S \subset V$ un subespacio.

a) Defina S^\perp y pruebe que $V = S \oplus S^\perp$.

Ver teórico.

b) Defina $P_S(v)$ y pruebe que $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, $\forall v \in V$.

Ver teórico.

c) Sea $V = M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ y S el subespacio definido como

$$S = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\}.$$

Halle $P_S(B)$ siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se llega a que $P_S(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En esta parte es conveniente proyectar B sobre

S^\perp , que tiene dimensión 1, y aplicar la fórmula $P_S(B) = B - P_{S^\perp}(B)$