Descomposición QR

1. Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Teorema 1.1 *Sean V un espacio vectorial con producto interno y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Entonces existe $\mathcal{B}' = \{y_1, ..., y_n\}$ tal que B es una base ortonormal de V y $[v_1, ..., v_k] = [y_1, ..., y_k]$ $\forall k = 1, ..., n$.*

Demostración:
Es claro que basta encontrar $\{u_1, ..., u_n\}$ base ortogonal de V tal que $[v_1, ..., v_k] = [y_1, ..., y_k]$ $\forall k = 1, ..., n$ ya que basta definir luego $y_i = \frac{u_i}{||u_i||}$. La demostración se hará por inducción completa en $n = \dim(V)$.

Para $n = 1$ el resultado es evidente ya que basta tomar $u_1 = v_1$. Para $n = 2$ se definen:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - c_{21}u_1 \quad \text{donde} \quad c_{21} = \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}$$

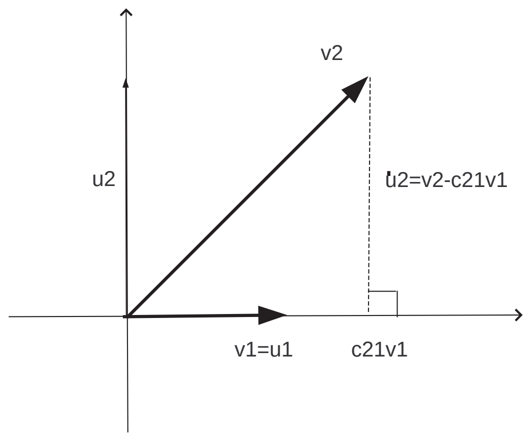
es decir

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}u_1$$

Dado que u_2 sólo depende de v_1 y v_2 es claro que $[u_1, u_2] = [v_1, v_2]$. Hay que verificar que u_1 y u_2 son ortogonales:

$$\begin{aligned}
\langle u_2, u_1\rangle &= \langle v_2 - c_{21}u_1, u_1\rangle \\
&= \langle v_2, u_1\rangle - c_{21}\langle u_1, u_1\rangle \\
&= \langle v_2, u_1\rangle - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\langle u_1, u_1\rangle = 0
\end{aligned}$$

Observar que u_2 es un vector perteneciente al subespacio generado por $\{v_1, v_2\}$ ortogonal a u_1. Además $||u_2|| \neq 0$ pues si $u_2 = \overrightarrow{0}$ entonces $v_2 = c_{21}u_1 = c_{21}v_1$ y esto es absurdo pues por hipótesis $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente.



Supongamos ahora que el resultado es válido para $n = m - 1$, probaremos que es válido para $n = m$. Por hipótesis de inducción se tiene que dada $\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ base de $S = [v_1, \ldots, v_{m-1}]$, existe una base ortogonal de S, $\{u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ tal que se cumple que $[u_1, \ldots, u_k] = [v_1, \ldots, v_k]$ $\forall\, k = 1, \ldots, m-1$. Probaremos que existe u_m tal que $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es base de V y $[u_1, \ldots, u_k] = [v_1, \ldots, v_k]$ $\forall\, k = 1, \ldots, m$.

Se define

$$u_m = v_m - c_{m(m-1)}u_{m-1} - \cdots - c_{m2}u_2 - c_{m1}u_1 = v_m - \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi}u_i \quad \text{donde}$$

$$c_{mj} = \frac{\langle v_m, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle} \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, m-1$$

Por hipótesis de inducción, para $j = 1, \ldots, m-1$ se tiene que u_j es combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}$ y por lo tanto de $v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}$. Por definición u_m es combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, v_m$ por lo tanto $[u_1, \ldots, u_m] = [v_1, \ldots, v_m]$. Con el mismo argumento que antes debido a que el conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente se tiene que $||u_j|| \neq \overrightarrow{0}$.

Sólo falta probar que u_m es ortogonal a u_j $\forall\, j = 1, \ldots, m-1$:

$$\langle u_m, u_j\rangle = \langle v_m - \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi}u_i, u_j\rangle = \langle v_m, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi}\langle u_i, u_j\rangle$$

Por hipótesis de inducción $\{u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}\}$ es un conjunto ortogonal, por lo tanto $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ $\forall\, i \neq j$. Entonces,

$$\langle u_m, u_j\rangle = \langle v_m, u_j\rangle - c_{mj}\langle u_i, u_j\rangle = \langle v_m, u_j\rangle - \frac{\langle v_m, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle}\langle u_j, u_j\rangle = 0$$

pues el único término no nulo de la sumatoria es $i = j$.

∎

Observación 1.2 *Del teorema anterior se tiene que:*

$$v_1 = u_1 = ||u_1||y_1$$
$$v_2 = u_2 + c_{21}u_1 = ||u_2||y_2 + c_{21}||u_1||y_1$$
$$\vdots$$
$$v_k = u_k - c_{kk-1}u_{k-1} - \cdots - c_{k2}u_2 - c_{k1}u_1 = ||u_k||y_k - c_{kk-1}||u_{k-1}||y_{k-1} - \cdots - c_{k2}||u_2||y_2 - c_{k1}||u_1||y_1$$

donde $c_{kj} = \frac{\langle v_k, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle}$. *Por lo tanto*

$$coord_{\mathcal{B}'}v_k = (c_{k1}||u_1||, c_{k2}||u_2||, \cdots, c_{kk-1}||u_{k-1}||, ||u_k||, 0 \cdots, 0)$$

de donde la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$ es una matriz triangular superior con diagonal positiva:

$$_{\mathcal{B}'}((I))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} ||u_1|| & c_{21}||u_1|| & c_{31}||u_1|| & \cdots & c_{m1}||u_1|| \\ 0 & ||u_2|| & c_{32}||u_2|| & \cdots & c_{m2}||u_2|| \\ 0 & 0 & ||u_3|| & \cdots & c_{m3}||u_3|| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ||u_m|| \end{pmatrix}$$

2. Descomposición QR

Teorema 2.1 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ de rango m, entonces existe una matriz $Q \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ que verifica $Q^tQ = I$ (I matriz identidad de $n\times n$) y una matriz triangular superior $R \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ tal que $A = QR$.*

Demostración:
Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m$ los vectores columna de la matriz A (cada v_i es un vector de $\mathbb{R}^n$). El conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es base del subespacio S generado por las columnas de A.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{array} \right)$$

Por el teorema 1.1 (método de Gram-Schmidt) existe una base $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ de S tal que $[y_1, ..., y_k] = [v_1, ..., v_k]$ $\forall k = 1, ..., m$.

Sea R la matriz de cambio de base ${}_{\mathcal{B}'}((I))_{\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$. Por la observación anterior R es una matriz triangular superior.

Por otro lado se define la matriz Q cuyas columnas son los vectores $y_1, y_2, \ldots, y_m$, es decir:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c|c} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array} \right)$$

Es claro que por ser $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ un conjunto ortonormal $Q^tQ = I$ $((Q^tQ)_{ij} = \langle y_i, y_j\rangle)$. Sólo resta verificar que $QR = A$:

$$\begin{aligned} QR &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array} \right) \begin{pmatrix} ||u_1|| & c_{21}||u_1|| & \cdots & c_{m1}||u_1|| \\ 0 & ||u_2|| & \cdots & c_{m2}||u_2|| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & ||u_m|| \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} ||u_1||y_1 & c_{21}||u_1||y_1 + ||u_2||y_2 & \cdots & c_{m1}||y_1||y_1 + \ldots c_{mm-1}||y_{m-1}||y_{m-1} + ||u_m||y_m \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{array} \right) = A \end{aligned}$$

Otra forma de demostrar el teorema es observar que Q es la matriz asociada a la transformación lineal $i : S \to \mathbb{R}^n$ tal que $i(y) = y$ (inclusión del subespacio S de dimensión m en $\mathbb{R}^n$) es decir $Q =_{\mathcal{C}} ((i))_{\mathcal{B}'}$ donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto

$$QR =_{\mathcal{C}} ((i))_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}((I))_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{C}}((ioI))_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{C}}((i))_{\mathcal{B}} = A$$

■

Observación 2.2 *A las matrices cuadradas $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$ que verifican $Q^tQ = QQ^tI$ se les denomina* matrices orotogonales *y serán objeto de estudio más adelante en este curso.*

Ejemplo 2.3 *Hallar la descomposición QR de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,0,1), (0,2,1), (1,1,0)\}$ las columnas de A. Aplicaremos el método de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B}$. Entonces:

$$u_1 = v_1 = (1,0,1)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Normalizando se obtiene:

$$y_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

$$y_2 = \frac{u_2}{||u_2||} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$$

$$y_3 = \frac{u_2}{||u_2||} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Por lo tanto:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$