Matemática Discreta I

Primer Parcial del curso 2008

Jueves 2 de octubre de 2008

RESPUESTAS						
1	2	3	4	5	6	7
D	E	C	A	E	C	

◇ Son 7 preguntas: 6 múltiple opción y 1 de desarrollo.
◇ Las preguntas tipo "múltiple opción" valen 5 puntos; la pregunta tipo "desarrollo" vale 10 puntos, y no se restan puntos.

EJERCICIO 1 ¿Cuántos números menores o iguales a 20123 verifican que sus dígitos suman 8?
Opciones: A) 495; B) 285; C) 165; D) 295; E) 293.

SOLUCIÓN: Los naturales son de la forma abcde, donde a puede ser 0, 1 o bien 2.
Si a=0 contamos las soluciones naturalesde b+c+d+e=8, que son combinaciones de 11 en 3, o sea 165.
Si a=1 tenemos análogamente: b+c+d+e=7, con 120 soluciones.
Por último, si a=2 necesariamente b=0 (por ser abcde $<$ 20123) y las terminaciones válidas son: 0de con d+e=6 : 7 soluciones; o 1de con 1de $<$ 123 : terminaciones 05, 14 y 23, que son 3.
Por regla de la suma son en total: 165 + 120 + 7 + 3 = 295.

EJERCICIO 2 ¿Cuántas permutaciones de la palabra VENTANA hay que no contengan VE, ni TA, ni AA?
Opciones: A) 11; B) 25; C) 451; D) 210; E) 528.

SOLUCIÓN: Usamos inclusión-exclusión:
Todas las permutaciones son $\frac{7!}{2!2!}$;
Restamos: con VE $\frac{6!}{2!2!}$; Restamos: con TA 6!/2!; Restamos: con AA 6!/2!;
Sumamos: con VE y TA 5!/2!; Sumamos: con VE y AA 5!/2!; Sumamos: con TA y AA 5!/2! (Tomamos TAA como un nuevo símbolo porque han de estar TA y AA juntas);
Restamos: con VE y TA y AA 4!/2!.
Total: 528.

EJERCICIO 3 Sea $f(x)$ la función generatriz asociada a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(b_n)_{n\in N}$ es la sucesión que genera la función $g(x) = \frac{3x^2 f(x)}{1-x}$, entonces b_n vale:
Opciones:

A) $3a_n,\ \forall n \geq 0.$

B) $\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-2} a_i,\ \forall n \geq 2.$

C) $3\sum_{i=0}^{n-2} a_i,\ \forall n \geq 2.$

D) $3a_{n-2},\ \forall n \geq 2.$

E) $3\sum_{i=0}^{n+2} a_i,\ \forall n \geq 0.$

SOLUCIÓN: El factor $\frac{f(x)}{(1-x)}$ es el "operador suma" para la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Luego multplicar por x^2 implica un tralsación en dos términos de los coeficientes de la sucesión. Luego resta multiplicar todo por tres. O sea, $b_n = 3\sum_{i=0}^{n-2} a_i,\ \forall n \geq 2.$

EJERCICIO 4 Un semáforo se ha descompuesto prendiendo aleatoriamente sus tres luces de colores. Siempre hay un único color prendido, cuando este color se apaga, se prende otro (diferente) cualquiera. Al encender el semáforo se prende la luz verde, y antes de apagarse se producen 1000 cambios. ¿Cuántas secuencias de co-lores diferentes pueden ocurrir si el último color que se encendió fue el verde?
Opciones: A) $\frac{(2+2^{1000})}{3}$; B) $2^{1000} - (\frac{1}{3})^{1000}$; C) $(-1)^{1000} + 2^{1000}$; D) $(\frac{2}{3})^{1000} + 2^{1000}$; E) $2^{1000} + 2$.

SOLUCIÓN: Dos posibles vías para resolver este problema son: Sea a_n el número de secuencias que comienzan y termina con verde después de n cambios.

* Observar que vale la relación de recuerrencia $a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1}$;

* Observar que vale la relación de recurrencia: $a_{n+1} = 2^n - a_n$.

En el primer caso tenemos una ecuación homogénea de coef. constantes de segundo orden, y en el segundo de primer orden no homogénea. Ambos casos, observando que $a_0 = 1$ y que $a_1 = 0$ llevan a la solución: $\frac{(2+2^{1000})}{3}$

EJERCICIO 5 La cantidad de enteros positivos n menores que 1000 tales que el máximo común divisor $mcd(n, 110) = 2$ es:
Opciones: A) 91; B) 100; C) 192; D) 210; E) 364.

SOLUCIÓN: Nuevamente aplicamos el principio de inclusión - exclusión. Llamemos c_1 a la condición ser impar menor que 1000, c_2 a la condición ser múltiplo de 5 menor que 1000 y c_3 a la condición ser múltiplo de 11 menor que 1000. Luego, queremos calcular $N(\overline{c_1c_2c_3})$. Esto es, aplicando la fórmula asociada al principio obtenemos: $1000 - 500 - 200 - 90 + 100 + 45 + 18 - 9 = 364$.

EJERCICIO 6 Se considera una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifica la ecuación: $a_{n+5} + 5a_{n+4} + 10a_{n+3} + 10a_{n+2} + 5a_{n+1} + a_n = 0$. El menor positivo $s \in \mathbb{N}$ que garantiza que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^s} = 0$ es:
Opciones: A) $s = 1$; B) $s = 3$; C) $s = 5$; D) $s = 7$; E) No existe un valor de s que garantice la afirmación.

SOLUCIÓN: La ecuación asociada es: $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 = 0$, o sea,

$(x+1)^5 = 0$. Luego la solución de la relación de recurrencia es de la forma: $a_n = k_1(-1)^n.n^4 + k_2(-1)^n.n^3 + k_3(-1)^n.n^2 + k_4(-1)^n.n + k_5(-1)^n$. De esta forma la solución buscada es $s = 5$.

EJERCICIO DE DESARROLLO

EJERCICIO 7 Demostrar que: $1 \times 3 + 2 \times 4 + ... + n \times (n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN: Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} i(i+2) = \sum_{i=1}^{i=n} i^2 + 2.\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.