

MATEMÁTICA DISCRETA I - 2008. PRÁCTICO 7
Grafos: subgrafo, subgrafos inducidos y recubridores.
Isomorfismos y grafo complemento.
Grado y grafos regulares.
Recorridos y circuitos eulerianos y ciclos hamiltonianos.

ACLARACIONES Y DEFINICIONES

Todos los grafos de este práctico se suponen simples, es decir, sin aristas múltiples.

Un vértice es *aislado* si no es adyacente a ningún otro.

El *grafo complemento* \bar{G} de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\bar{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

Un grafo G se dice *autocomplementario* si es isomorfo a \bar{G} .

Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos vértices disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$), entonces su *grafo unión* $G_1 \cup G_2$ se define como $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

$\kappa(G)$ es la cantidad de componentes conexas de G .

Un grafo se dice *k-regular* si todos sus vértices tiene grado k . Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1.

EJERCICIOS

Ejercicio 1 Sea G el grafo de la Figura 1 (a).

a) ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?

b) Describa el subgrafo G_1 de G (Figura 1 (b)) como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G .

c) Ídem para el subgrafo G_2 (Figura 1 (c)).

d) Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.

e) Sean e_1 y e_2 las aristas $\{a, c\}$ y $\{a, d\}$ respectivamente del grafo G . Trace los siguientes subgrafos de G : (i) $(G - e_1) - e_2$; (ii) $(G - e_2) - e_1$; (iii) $G - \{e_1, e_2\}$.

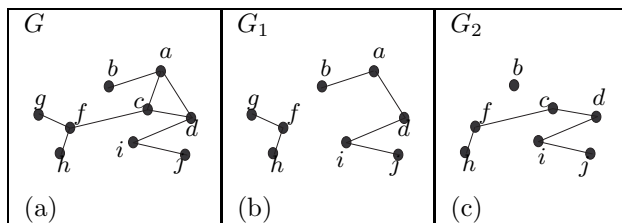


Figura 1:

f) Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.

- g) ¿Qué condición o condiciones debe cumplir un subgrafo para no ser inducido?
- h) ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G ?
- i) ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?
- j) ¿cuántos subgrafos de la parte h) tienen el vértice a como vértice aislado?

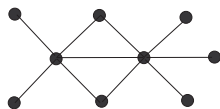


Figura 2:

Ejercicio 2 Encuentre un grafo G que tenga dos vértices u y v tales que

$$\kappa(G - u) = \kappa(G) \quad \kappa(G - v) > \kappa(G)$$

Ejercicio 3 Encuentre todos los árboles no isomorfos con 6 vértices.

Ejercicio 4 (2do parcial 2001) Hallar el número de subgrafos conexos recubridores no isomorfos del grafo de la Figura 2.

Ejercicio 5 Para cada par de grafos de la Figura 3 determine si los grafos son o no isomorfos

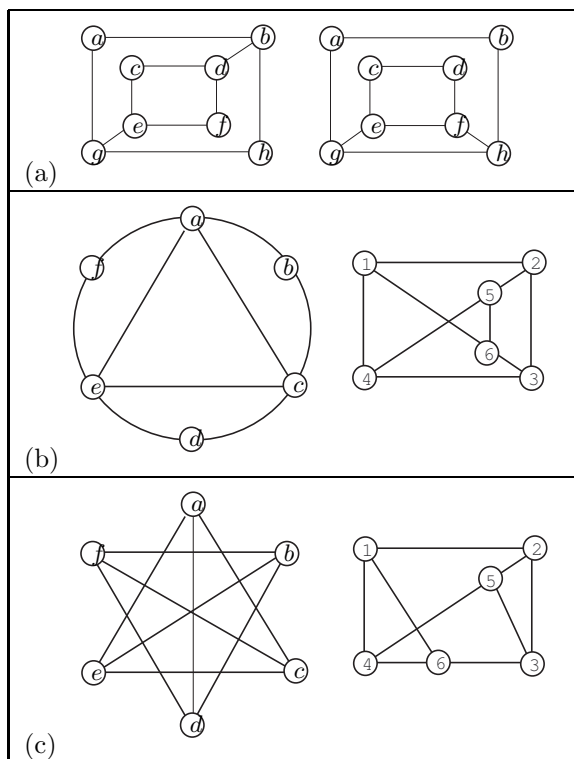


Figura 3:

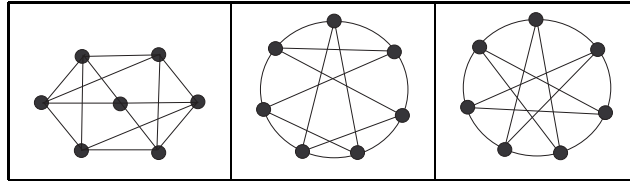


Figura 4:

Ejercicio 6 a) Demuestre que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.

b) (2do parcial curso 2000) ¿Cuáles de los grafos de la Figura 4 son isomorfos?

c) Determine el número de aristas de \bar{G} en función del número de aristas de G .

d) Determine el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden n .

e) Construya un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.

f) Determine para que valores de n existe un grafo autocomplementario de orden n .

Ejercicio 7 Pruebe que K_n posee tres subgrafos dos a dos isomorfos y arista disjuntos si y solo si n es de la forma $3k$ o $3k + 1$.

Ejercicio 8 a) Hallar el grado de cada vértice del grafo de la Figura 2.

b) ¿Cuántas aristas tiene dicho grafo?

c) ¿Cuántos vértices de grado impar tiene?

Ejercicio 9 a) Determine el orden de un grafo 3-regular con 9 aristas.

b) Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

c) ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 10 En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 11 Sea G un grafo con n vértices. ¿Cuántos vértices de \bar{G} tienen grado par si G tiene un sólo vértice de grado par?

Ejercicio 12 a) ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?

b) ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

Ejercicio 13 Para todo natural par $n \geq 4$ construya un grafo conexo 3-regular con n vértices.

Ejercicio 14 Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 15 ¿Cuántas hojas tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5? (hojas = vértices colgantes)

Ejercicio 16 Hallar un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 5 o demuestre que no existe.

Ejercicio 17 Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 18 a) Determine los valores de n para los que el grafo completo K_n tiene un circuito euleriano.

b) ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

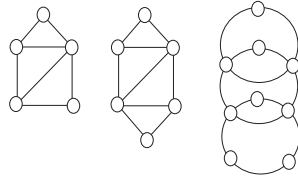


Figura 5:

Ejercicio 19 Encuentre la longitud máxima de un recorrido en

- a) K_6 ; b) K_8 ; c) K_{10} ; d) K_{2n} , $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 20 Sea \mathcal{E} y \mathcal{H} los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dé un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

Ejercicio 21 Encuentre un ciclo hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 6.

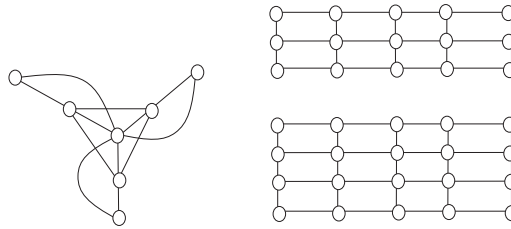


Figura 6:

SUGERENCIAS

Ejercicio 6 f) Demuestre que n debe ser de la forma $4k$ o $4k + 1$. Para $n = 4k$, generalice la estructura del grafo autocomplementario de orden 4 agrupando los vértices en cuatro grupos. Para $n = 4k + 1$ agregue un vértice al grafo anterior y únalo en forma adecuada.