

Matemática Discreta I

Segundo Examen del curso 2006

9 de febrero de 2007.

N. de examen	Apellidos	Cédula de Identidad
--------------	-----------	---------------------

RESPUESTAS (llenar)						No llenar			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ACLARACIÓN

No hay puntos negativos y cada respuesta correcta vale 10 puntos. No se puede usar material.

Toda la información extra sobre el examen será publicada en la web¹.

EJERCICIO 1 ¿Cuántas permutaciones de la palabra PAPELERAS comienzan con PAPEL o terminan con ERAS o tienen la palabra PELEA en algún lugar?

Opciones: A) 33; B) 34; C) 100; D) 201 ; E) 205.

EJERCICIO 2 ¿Cuántas funciones f de $\{1, 2, \dots, 10\}$ a $\{1, 2, \dots, 30\}$ hay tales que $f(i+1) > f(i) + 1$? (*Sugerencia:* considerar $x_1 = f(1)$ y $x_i = f(i) - f(i-1)$ para $i = 2, \dots, 10$.)

Opciones: A) C_{10}^{20} ; B) C_{10}^{21} ; C) C_{11}^{21} ; D) C_{20}^{31} ; E) C_{30}^{40} .

EJERCICIO 3 Un cajero automático se quedó sin billetes de 100\$ por lo que solo podrá dar los montos con billetes de 200\$, 500\$ y 1000\$. Sea a_n la cantidad de formar que tiene de dar $n \times 100$ \$. Entonces la función generatriz

de a_n es: Opciones:

A) $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$.

B) $\frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$.

C) $\frac{x^{17}}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$.

D) $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$.

E) $\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$.

EJERCICIO 4 Sea $G = K_4 - e$ siendo e una arista de K_4 . Considere el conjunto A de los subgrafos acíclicos de G , y $R \subseteq A \times A$ definida por HRH' si H es subgrafo de H' . Hallar la cantidad m y n de elementos minimales y maximales respectivamente de R .

Opciones:

A) $m = 1, n = 1$.

B) $m = 4, n = 2$.

C) $m = 4, n = 7$.

D) $m = 4, n = 8$.

E) $m = 6, n = 8$.

EJERCICIO 5 Contar cuantos grafos no isomorfos entre sí con nueve vértices, conexos y

¹<http://imerl.fing.edu.uy/md1/Home/tabid/53/Default.aspx>

regulares de grado 6 hay.
Opciones: A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

des y el techo de un cuarto de forma tal que paredes adyacentes tengan distinto color y el techo tenga distinto color que las 4 paredes. Si disponemos de 5 colores, ¿de cuántas formas puede hacerse? Opciones: A) 120; B) 160 ; C) 200; D) 280; E) 420.

EJERCICIO 6 Queremos pintar las 4 pare-

EJERCICIOS DE DESARROLLO

EJERCICIO 7 Sea $n > 2$ y $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ un grafo simple (sin aristas múltiples ni lazos). Sea $G_i = G - v_i$ el grafo obtenido a partir de G al quitarle el vértice v_i . Demostrar que

$$|E| = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n |E_i|,$$

siendo E_i el conjunto de aristas de G_i .

EJERCICIO 8 Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones n veces derivables de \mathbb{R} a \mathbb{R} . Demostrar que

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_i^n f^{(i)} \cdot g^{(n-i)}$$

Donde $h^{(i)}$ denota la derivada i -ésima de h . (Sugerencia: Inducción en n .)

EJERCICIO 9 a) 10 personas eligen números naturales del 1 al 40 (dos personas podrían elegir el mismo número). Demostrar que hay al menos 2 subconjuntos distintos formados por tres personas tal que la suma de números por ellos elegidos coincide.

b) Demostrar lo mismo si los naturales van del 1 al 42.

EJERCICIO 10 Sea una franja de $2 \times n$ decímetros que quiere embaldosarse. Las baldosas son de dos tipos: tipo A cuadradas de 2×2 decímetros y tipo B rectangulares de 2×1 decímetros. Se puede usar cualquier cantidad de dichas baldosas. Sea a_n la cantidad de embaldosados posibles. Demostrar que si n es par entonces

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 1}{3}.$$

Sugerencia: Hallar una ecuación en recurrencia para a_n .