

**Matemática Discreta I**  
 Segundo Examen del curso 2006  
 9 de febrero de 2007.  
**SOLUCIÓN**

RESPUESTAS (llenar)						No llenar			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	A	D	E	E				

**EJERCICIO 1** ¿Cuántas permutaciones de la palabra PAPELERAS comienzan con PAPEL o terminan con ERAS o tienen la palabra PELEA en algún lugar? Opciones: A) 33; B) 34; C) 197; D) 201; E) 205.

**SOLUCIÓN:** Hay  $4!$  palabras que empiezan con PAPEL, hay  $5!/2$  que terminan con ERAS, hay solo una que empieza con PAPEL y termina con ERAS, hay  $4! \times 5$  que tienen la palabra PELEA en algún lugar, hay 2 que empiezan con PAPEL y tienen la palabra PELEA en algún lugar (PAPELEAR y PAPELEASR) y no hay ninguna que termine con ERAS y tenga la palabra PELEA en algún lugar, así que en total son  $24 + 60 + 120 - 1 - 2 = 201$ .

**EJERCICIO 2** ¿Cuántas funciones  $f$  de  $\{1, 2, \dots, 10\}$  a  $\{1, 2, \dots, 30\}$  hay tales que  $f(i+1) > f(i) + 1$ ? (Sugerencia: considerar  $x_1 = f(1)$  y  $x_i = f(i) - f(i-1)$  para  $i = 2, \dots, 10$ .)

Opciones: A)  $C_{10}^{20}$ ; B)  $C_{10}^{21}$ ; C)  $C_{11}^{21}$ ; D)  $C_{20}^{31}$ ; E)  $C_{30}^{40}$ .

**SOLUCIÓN:** Basta definir  $x_i$  como en la sugerencia y  $x_1 = f(1)$  y  $x_{11} = 30 - \sum_{i=1}^{10} x_i$ . Como además  $\sum_{i=1}^{10} x_i = f(10) \leq 30$  tendremos  $x_{11} \geq 0$  y el problema será equivalente a contar las soluciones de

$$x_1 + \dots + x_{11} = 30$$

con  $x_i \geq 2$  para  $i = 2, \dots, 10$  y  $x_1 \geq 1, x_{11} \geq 0$ . Por lo que la solución es  $CR_{30-2 \times 9-1}^{11} = C_{11}^{21}$ .

**EJERCICIO 3** Un cajero automático se quedó sin billetes de 100\$ por lo que solo podrá dar los montos con billetes de 200\$, 500\$ y 1000\$. Sea  $a_n$  la cantidad de formar que tiene de dar  $n \times 100$ \$. Entonces la función generatriz de  $a_n$  es: Opciones:

- A)  $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$   
 B)  $\frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$   
 C)  $\frac{x^{17}}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$   
 D)  $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$   
 E)  $\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$

**SOLUCIÓN:** La función generatriz será  $(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + x^{10} + x^{20} + \dots) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$

**EJERCICIO 4** Sea  $G = K_4 - e$  siendo  $e$  una arista de  $K_4$ . Considere el conjunto  $A$  de los subgrafos acíclicos de  $G$ , y  $R \subseteq A \times A$  definida por  $HRH'$  si  $H$  es subgrafo de  $H'$ . Hallar la cantidad  $m$  y  $n$  de elementos minimales y maximales respectivamente de  $R$ .

Opciones:

- A)  $m = 1, n = 1$ .  
 B)  $m = 4, n = 2$ .  
 C)  $m = 4, n = 7$ .  
 D)  $m = 4, n = 8$ .

E)  $m = 6, n = 8$ .

SOLUCIÓN: Los minimales son los subgrafos formados por un solo vértice y son 4. Los maximales son los árboles recubridores y son 8 (esto se puede ver a mano o sino de la siguiente manera: como son árboles deben tener  $4 - 1 = 3$  aristas de las 5 del grafo, así que se construyen sacando dos aristas del grafo de forma tal de no dejar ningún vértice aislado y ningún ciclo, lo cual se puede hacer de dos maneras posibles solamente, así que son  $C_3^5 - 2 = 8$ ).

**EJERCICIO 5** Contar cuantos grafos no isomorfos entre sí con nueve vértices, conexos y regulares de grado 6 hay.

Opciones: A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

SOLUCIÓN: Basta tomar el complemento. Dicho grafo será regular de grado 2, así que estará formado por ciclos. Los únicos casos posibles son  $C_3 \cup C_3 \cup C_3$ ,  $C_3 \cup C_6$ ,  $C_4 \cup C_5$  y  $C_9$ , o sea las descomposiciones de 9 en sumas de términos mayores que 2:  $9 = 3 + 6 = 4 + 5 = 3 + 3 + 3$ . Observar que si un grafo tiene 9 vértices y es regular de grado 6 siempre es conexo, pues dos vértices cualesquiera o bien son adyacentes o tiene como mínimo  $6 + 6 - 7 = 5$  vértices adyacentes en común. Otra forma de ver esto último es que si un grafo tiene dos componentes conexas su complemento es conexo, lo cual da cuentas de los primeros tres

grafos, mientras que para  $C_9$  se puede comprobar haciendo el dibujo.

**EJERCICIO 6** Queremos pintar las 4 paredes y el techo de un cuarto de forma tal que paredes adyacentes tengan distinto color y el techo tenga distinto color que las 4 paredes. Si disponemos de 5 colores, ¿de cuántas formas puede hacerse?

Opciones:

- A) 120.
- B) 160.
- C) 200.
- D) 280.
- E) 420.

SOLUCIÓN: Si a cada pared y al techo le asignamos un vértice y los conectamos si son linderos entonces el problema se reduce a hallar cuantas coloraciones con 5 colores tiene dicho grafo que no es más que  $W_4$ . O sea que basta hallar el polinomio cromático de  $W_4$  y evaluarlo en 5. Sea  $e$  una arista que no sea un rayo, entonces:

$$[W_4] = [W_4 - e] - [K_4] = \frac{[K_3]^3}{[K_2]^2} - [K_4]$$

Donde  $[W_4 - e]$  lo hayamos aplicando dos veces el TEOREMA 11.14. Por lo tanto el total es

$$\frac{[A_3^5]^3}{[A_2^5]^2} - [A_4^5] = 420.$$

---

## EJERCICIOS DE DESARROLLO

**EJERCICIO 7** Sea  $n > 2$  y  $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$  un grafo simple (sin aristas múltiples ni lazos). Sea  $G_i = G - v_i$  el grafo obtenido a partir de  $G$  al quitarle el vértice  $v_i$ . Demostrar que

$$|E| = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n |E_i|,$$

siendo  $E_i$  el conjunto de aristas de  $G_i$ .

SOLUCIÓN: Como  $G_i = G - v_i$  tenemos que :

$$|E_i| = |E| - gr(v_i).$$

Sumando en  $i$  obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n |E_i| = \sum_{i=1}^n [|E| - gr(v_i)] = \sum_{i=1}^n |E| - \sum_{i=1}^n gr(v_i) = n|E| - 2|E|.$$

Despejando  $|E|$  obtenemos el resultado pedido.

**EJERCICIO 8** Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones  $n$  veces derivables de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ . Demostrar que

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_i^n f^{(i)}.g^{(n-i)}$$

Donde  $h^{(i)}$  denota la derivada  $i$ -ésima de  $h$ . (Sugerencia: Inducción en  $n$ .)

SOLUCIÓN: Por inducción en  $n$ : Paso base  $n = 0$ ,  $(f.g)^{(n)} = (f.g)^{(0)} = f.g$  y

$$\sum_{i=0}^n C_i^n f^{(i)}.g^{(n-i)} = \sum_{i=0}^0 C_i^0 f^{(i)}.g^{(0-i)} = C_0^0 f^{(0)}.g^{(0-0)} = 1.f^0.g^0 = f.g.$$

Paso inductivo: supongamos que vale para  $n$  y lo demostraremos para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} (f.g)^{(n+1)} &= \left( (f.g)^{(n)} \right)' \stackrel{HI}{=} \left( \sum_{i=0}^n C_i^n f^{(i)}.g^{(n-i)} \right)' = \sum_{i=0}^n C_i^n [f^{(i+1)}.g^{(n-i)} + f^{(i)}.g^{(n-i+1)}] = \\ &= \sum_{i=0}^n C_i^n f^{(i+1)}.g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^n C_i^n f^{(i)}.g^{(n+1-i)} \stackrel{j=i+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} C_{j-1}^n f^{(j)}.g^{(n-j+1)} + \sum_{i=0}^n C_i^n f^{(i)}.g^{(n+1-i)} = \\ &= C_{(n+1)-1}^n f^{(n+1)}.g^{(n-(n+1)+1)} + C_0^n f^{(0)}.g^{(n+1-0)} + \sum_{i=1}^n (C_{i-1}^n + C_i^n) f^{(i)}.g^{(n+1-i)} = \\ &= f^{(n+1)}.g^{(0)} + f^{(0)}.g^{(n+1)} + \sum_{i=1}^n C_i^{n+1} f^{(i)}.g^{(n+1-i)} = \\ &= C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)}.g^{(n+1-(n+1))} + C_0^{n+1} f^{(0)}.g^{(n+1)} + \sum_{i=1}^n C_i^{n+1} f^{(i)}.g^{(n+1-i)} = \sum_{i=0}^{n+1} C_i^{n+1} f^{(i)}.g^{(n+1-i)}. \end{aligned}$$

**EJERCICIO 9** a) 10 personas eligen números naturales del 1 al 40 (dos personas podrían elegir el mismo número). Demostrar que hay al menos 2 subconjuntos distintos formados por tres personas tal que la suma de números por ellos elegidos coincide.

b) Demostrar lo mismo si los naturales van del 1 al 42.

SOLUCIÓN: a) Por el principio del palomar. Tomemos como palomares las sumas posibles. Solo teniendo en cuenta que son números del 1 al 40 tenemos 118 sumas a saber  $1 + 1 + 1 = 3$ ,  $1 + 1 + 2 = 4, \dots, 40 + 40 + 40 = 120$ . Como palomas, las ternas de naturales elegidas de entre las 10 existentes, sin importar el orden, que son  $C_3^{10} = 120$ . Como  $120 > 118$ , por el principio del palomar tendremos dos palomas (ternas) que van al mismo palomar (suma).

b) En este caso las sumas son 124 (del 3 al  $42 + 42 + 42 = 126$ ) por lo que no podemos aplicar el principio del palomar directamente. Una forma de subsanar el problema es considerar dos casos según si los números elegidos son todos distintos o alguno se repite. Si son todos distintos entonces las sumas posible son solo 118 (del  $1 + 2 + 3 = 6$  al  $40 + 41 + 42 = 123$ ) menor que 120. Si hay dos iguales, supongamos  $x_1 = x_2$ , entonces  $x_1 + x_3 + x_4 = x_2 + x_3 + x_4$ .

**EJERCICIO 10** Sea una franja de  $2 \times n$  decímetros que quiere embaldosarse. Las baldosas son de dos tipos: tipo A cuadradas de  $2 \times 2$  decímetros y tipo B rectangulares de  $2 \times 1$  decímetros. Se puede usar cualquier cantidad de dichas baldosas. Sea  $a_n$  la cantidad de embaldosados posibles. Demostrar que si  $n$  es par entonces

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 1}{3}.$$

*Sugerencia:* Hallar una ecuación en recurrencia para  $a_n$ .

SOLUCIÓN: Cada embaldosado comienza o bien con una baldosa cuadrada o con una rectangular vertical o con dos rectangulares horizontales, por lo que

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n-2} = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Además  $a_1 = 1$  (solo una baldosa vertical) y  $a_2 = 3$ . Resolviendo esta ecuación homogénea de grado 2 con dos condiciones iniciales obtenemos que  $a_n = (2^{n+1} + (-1)^n)/3$  de lo cual se concluye que para  $n$  par  $a_n = (2^{n+1} + 1)/3$ .