Matemática Discreta I

Segundo Examen del curso 2007

lunes 11 de febrero de 2008.

RESOLUCIÓN

RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6
A	A	C	B	A	D

ACLARACIÓN

No hay puntos negativos y cada respuesta correcta vale 10 puntos salvo el ejercicio 9 que vale 20 puntos.
Toda la información extra sobre el examen será publicada en la web *http://imerl.fing.edu.uy/matdisc1/*.

Ejercicio 1 ¿De cuántas formas se pueden distribuir cinco fábricas de pasta de celulosa entre 19 departamentos si en 5 de ellos solo se puede colocar a lo sumo una pastera? Se considera que los departamentos son distinguibles pero las pasteras no.
Opciones: A) 27189; B) 27190; C) 27191; D) 27192; E) 27193.

Solución: Es equivalente a resolver

$$x_1 + \cdots + x_{19} = 5$$

con $x_1, ..., x_5 \leq 1$. Lo cual es, aplicando PIE,

$$CR_5^{19} - 5CR_3^{19} + C_2^5 CR_1^{19} = C_5^{23} - 5C_3^{21} + C_2^5 C_1^{19}$$

$= 23.22.21.20.19/5.4.3.2 - 5.21.20.19/3.2 + 10.19 = 19((23.22/5.4 - 5)21.20/6 + 10) = 19((23.11/10 - 5)7.10 + 10) = 190((25,3 - 5)7 + 1) = 190(20,3.7 + 1) = 190.(142,1 + 1) = 190.143,1 = 19.1431 = 27189$

Ejercicio 2 Una función $f : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ se dice *unimodal* si existe $a \in \{1, \dots, n\}$ tal que si $x < a$ entonces $f(x) < f(x+1)$ pero si $x \geq a$ entonces $f(x) > f(x+1)$. ¿Cuántas de estas funciones que además sean inyectivas hay?
Opciones: A) $C_n^m 2^{n-1}$; B) $C_n^m 2^n$; C) $A_n^m 2^{(n-1)(n-2)/2}$; D) $A_n^m 2^{(n-1)(n-2)}$; E) $A_n^m 3^{(n-1)(n-2)}$.

Solución: Las funciones se construyen en dos pasos. Primero elegimos su recorrido de C_n^m formas. Luego elegimos cuales de esos elementos corresponden a imágenes de valores menores que a, esto se hace de 2^{n-1} formas, a que el mayor de los valores no se puede elegir pues será el valor en a.

Ejercicio 3 ¿Cuántos subgrafos conexos tiene P_n si $n \geq 3$?
Opciones: A) $2n$; B) $n(n-1)/2$; C) $(n+1)n/2$; D) $n(n-1)$; E) $n(n-1)(n-2)$.

Solución: Un subgrafo conexo de P_n es él mismo un camino o un grafo trivial (con un solo vértice). Un camino queda caracterizado por sus extremos, y hay C_2^n formas de elegir dos extremos. Además hay n grafos triviales. Por lo tanto son $n(n-1)/2+n=n(n+1)/2$ subgrafos.

Ejercicio 4 Encuentre el coeficiente de x^{28} de la función:

$$f(x)=(x^3+x^5+x^7+\cdots)^6.$$

Opciones: A) 251; B) 252; C) 253; D) 254; E) 255. Solución:

$$(x^3+x^5+x^7+\cdots)^6=(x^3)^6(1+x^2+x^4+\cdots)^6=x^{18}(1-x^2)^{-6}=x^{18}\sum_{n=0}^{\infty}CR_n^6x^{2n}.$$

Cuyo coeficiente en x^{28} es $CR_5^6=252$.

Ejercicio 5 Sea G un grafo isomorfo a K_5. Considere el conjunto A de subgrafos inducidos planos de G ordenados por inclusión. Hallar la mínima cantidad m de anticadenas en que se puede particionar A. Opciones: A) $m=4$; B) $m=5$; C) $m=6$; D) $m=7$; E) $m=10$.

Solución: Primero recordemos que un subgrafo inducido esta caracterizado por su conjunto de vértices y estará incluido en otro si lo están sus conjuntos de vértices. Además todo subgrafo propio de G es plano ya que K_5 es el grafo no plano con menor cantidad de vértices. La respuesta es 4 y para demostrarlo daremos una cadena con 4 elementos y una partición en 4 anticadenas. La cadena es (damos los conjuntos de vértices) la (si los vértices son $1,2,3,4,5$) $\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$, por otro lado, la partición es $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ donde A_i son los subgrafos con i vértices.

Ejercicio 6 Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido sin lazos ni aristas múltiples, con polinomio cromático $P(G;\lambda)$ y número cromático $\chi(G)$. Sea Δ el mayor grado de alguno de sus vértices. Es decir,

$$\Delta=\max_{v\in V} grado(v).$$

Indique la opción correcta Opciones:
A) Necesariamente $\chi(G)<\Delta+1$.
B) Necesariamente $\chi(G)=\Delta+1$.
C) Necesariamente $\chi(G)>\Delta+1$.
D) Necesariamente $P(G;\Delta+1)>0$.
E) Ninguna de las anteriores.

Solución: La primera y la tercera son falsas pues $\chi(K_1)=1$ y $\Delta(K_1)=0$. La segunda es falsa pues $\chi(K_{1,10})=2$ y $\Delta(K_{1,10})=10$. Es la cuarta pues todo grafo se puede pintar con $\Delta+1$ colores. Basta ir pintando los vértices en cualquier orden, y siempre habrá alguno de los $\Delta+1$ colores para pintar el vértice que toca, ya que es adyacente solo a Δ.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

Ejercicio 7 Demuestre si $n \geq 10$ entonces $n^3 < 2^n$.

Solución: Por inducción en n. Si $n = 10$ $n^3 = 1000$ y $2^{10} = 1024$. Supongamos cierto para n queremos demostrarlo para $n+1$: Aquí podemos hacerlo de dos formas.

Forma 1: $2^{n+1} = 2 \times 2^n >^{HI} 2n^3$ y $2n^3 > (n+1)^3$ sii $2^{1/3} > 1+1/n$, pero $1+1/n \leq 1{,}1$ cuando $n \geq 10$ y $1{,}1^3 = 1{,}331 < 2$.

Forma 2: $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 <^{HI} 2^n + 3n^2 + 3n + 1$, pero $3n^2 + 3n + 1 < 3n^2 + 3n + n = 3n^2 + 4n < 3n^2 + 4n^2 = 7n^2 < n^3 < 2^n$ por lo tanto $(n+1)^3 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ como queríamos demostrar.

Ejercicio 8 Hallar a_n para todo $n \geq 0$ si

$$a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = 1 \qquad \forall n \geq 0,$$

y $a_0 = 2a_1 = 3, a_2 = 5$.

Solución: La ecuación característica es $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ cuyas raíces son 1, -1 y 2. Como 1 es raíz, la solución particular será de la forma An. Sustituyendo tenemos: $A(n+3) - 2A(n+2) - A(n+1) + 2An = 1$ de donde $3A - 4A - A = 1$ y $A = -1/2$. La solución general será de la forma $\alpha + \beta(-1)^n + \delta 2^n - n/2$. Hallamos los parámetros para que verifique las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 3 \\ \alpha - \beta + \delta 2 - 1/2 = 3/2 \\ \alpha + \beta + \delta 4 - 1 = 5 \end{cases}$$

Cuya solución es $\alpha = \beta = \delta = 1$ como se puede fácilmente verificar. Así la solución es

$$1 + (-1)^n + 2^n - n/2.$$

Ejercicio 9 Una relación R es un *preorden* en A si es reflexiva y transitiva, pero no es necesariamente antisimétrica. Demostrar que

1. si R es un preorden entonces la relación $\sim$ definida por $a \sim b$ si aRb y bRa, es de equivalencia.
2. La relación $\tilde{R}$ definida en el conjunto cociente $A/\sim$ dada por

   $$[a]\tilde{R}[b] \iff aRb$$

   es una relación de orden.

3. Sea R la relación definida en el conjunto de grafos dada por: dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$, están relacionados ($G\,R\,G'$) si y solo si existe $f : V \longrightarrow V'$ inyectiva tal que $\{x, y\} \in E$ si y solo si $\{f(x), f(y)\} \in E'$.

   a) Demostrar que R es un *preorden*.

   b) Si A son los subgrafos conexos de $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 13, 14, 23\})$. Dibuje el diagrama de Hasse de $\tilde{R}$.

Solución:

1. $\sim$ de equivalencia. Reflexiva: como R reflexiva $\Rightarrow aRa$ y aRa, de donde $a \sim a$. Simétrica: si $a \sim b$ entonces aRb y bRa entonces bRa y aRb de donde $b \sim a$. Transitiva si $a \sim b \sim c$ entonces $aRbRc$ y $cRbRa$, como R es transitiva deducimos que aRc y cRa de donde $a \sim c$.

2. $\tilde{R}$ relación de orden. Reflexiva: R reflexiva $\Rightarrow aRa \Rightarrow [a]\tilde{R}[a]$. Antimétrica: $[a]\tilde{R}[b]\tilde{R}[a] \Rightarrow aRbRa \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$. Transitiva: $[a]\tilde{R}[b]\tilde{R}[c] \Rightarrow aRbRc \Rightarrow^{R\text{ trans}} aRc \Rightarrow [a]\tilde{R}[c]$. *Antes de continuar debemos aclarar que para ser todo lo anterior formalmente correcto se debe demostrar que la definición anterior de $\tilde{\mathrm{R}}$ no depende de los representantes a y b, sino no estaría bien definida. Para esto sean a' y b' otros representantes de $[a]$ y $[b]$, debemos demostrar que si aRb entonces $a'Rb'$. Efectivamente como $a' \in [a]$ y $b' \in [b]$ entonces $a'Ra$ y bRb', pero aRb, de donde $a'RaRbRb'$, lo cual implica, gracias a la transitividad de R, que $a'Rb'$. Todo esto no lo exigimos en la corrección.*

3. *a*) R *preorden*. Reflexiva: dado un grafo G basta tomar la función identidad para demostrar que GRG. Transitiva: supongamos que $GRG'RG''$ entonces existen funciones inyectivas $f : VG \longrightarrow VG'$ y $g : VG' \longrightarrow VG''$ tales que $xy \in EG$ sii $f(x)f(y) \in EG'$ y $x \in EG' siig(x)g(y) \in EG''$. Si consideramos la composición $g \circ f : VG \longrightarrow VG''$, vemos que es inyectiva ya que $g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow^{g\text{iny}} f(x) = f(y) \Rightarrow^{f\text{iny}} x = y$. Resta probar que $xy \in EG$ sii $g(f(x))g(f(y)) \in EG''$: efectivamente $xy \in EG$ sii $f(x)f(y) \in EG'$ sii $g(f(x))g(f(y)) \in EG''$.

   b) Para hacer esta parte observemos que en el caso de la R aquí definida, $G' \sim G''$ significa que G' y G'' son isomorfos, así un conjunto de representantes del conjunto conciente consistirá en subgrafos conexos no isomorfos. Estos son fáciles de hallar y son isomorfos a K_1, P_2, P_3, P_4, C_3, $K_{1,3}$ y G. El diagrama de Hasse será el siguiente: