Matemática Discreta I

Primer Examen del curso 2006

21 de diciembre de 2006.

N. de Examen	Apellidos	Cédula de Identidad

RESPUESTAS (llenar)						No llenar			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ACLARACIÓN
No hay puntos negativos y cada respuesta correcta vale 10 puntos. No se puede usar material.
Toda la información extra sobre el examen será publicada en la web[1].

Ejercicio 1 ¿Cuántas palabras distintas de 12 letras se pueden formar con las letras A, B, C de forma tal que aparezcan 2 As, 2 Bs y 8 Cs, y además cada A y cada B tengan una C de cada lado? Opciones:
A) 18.
B) 210.
C) 720.
D) 840.
E) 2970.

Ejercicio 2 El número de formas en que pueden seleccionarse 20 bolas de entre una colección de 12, 25 y 16 de colores rojo, blanco y negro respectivamente vale: Opciones: A) 171; B) 150; C) 180; D) 185; E) 231.

Ejercicio 3 Sea α tal que la ecuación en recurrencia

$$\alpha a_{n+2} + 4a_{n+1} + 2a_n = 0 \qquad \forall n \geq 0$$

que tiene como datos iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, cumple $a_2 = -1$. ¿Cuánto vale a_{100}?

Opciones: A) -99; B) -1; C) 1; D) 2; E) $2i + 3$.

Ejercicio 4 Sea A un conjunto con 8 elementos y sea H el conjunto de las relaciones de equivalencia sobre A que tienen 3 clases de equivalencia. Calcular $m = \max\{|R| : R \in H\}$ y $n = \min\{|R| : R \in H\}$.

Opciones:
A) $m = 64, n = 8$.
B) $m = 38, n = 22$.
C) $m = 38, n = 24$.
D) $m = 40, n = 16$.
E) Ninguna de las anteriores .

Ejercicio 5 Dado un grafo G definimos G^2 como aquel con los mismos vértices que G, pero tal que dos vértices distintos u y v son adyacentes en G^2 si existe un vértice w adyacente a u y a v en G. Para $n \geq 3$ considere $G_n = C_n^2$. Indicar la opción correcta

Opciones:
A) Si $n \geq 4$, los vértice de G_n tienen grado par.

[1] *http://imerl.fing.edu.uy/md1/Home/tabid/53/Default.aspx*

B) Si $n \geq 5$ entonces G_n es conexo .
C) Si $n \geq 5$ entonces G_n es euleriano .
D) Si $n \geq 5$ entonces G_n es hamiltoniano .
E) Ninguna de la anteriores..

EJERCICIO 6 Sea G un grafo con n vértices, número cromático c, polinomio cromático $p(x)$, con un vértice con grado d y los demás con grado menor o igual a d. Indicar la opción correcta.

Opciones:
A) $c \leq d+1$, $p(c) = 0$, grado de $p = n$.
B) $c \leq d+1$, $p(c) > 0$, grado de $p = d$.
C) $c \leq d+1$, $p(c-1) = 0$, grado de $p = n$.
D) $c \leq d$, $p(c-1) > 0$, grado de $p = d$.
E) $c \leq d$, $p(c-1) = 0$, grado de $p = n$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

EJERCICIO 7 Sea $\mathscr{G}$ el conjunto de grafos no planos y $R \subset \mathscr{G} \times \mathscr{G}$ la relación *subgrafo de*. Sea G un elemento minimal de R, con v vértices y e aristas. Demostrar o dar un contraejemplo de las siguientes afirmaciones

A G es conexo.

B $v \geq 6$.

C $e \leq 3v - 5$.

D G no posee vértices de grado 2.

EJERCICIO 8 Sea $T = (V, E)$ un árbol y $V_3 = \{v \in V : grado(v) \geq 3\}$. Demostrar que la cantidad de hojas de T es

$$2 + \sum_{v \in V_3} (grad(v) - 2).$$

EJERCICIO 9 Probar que si extraemos n+1 números distintos de entre $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ entonces hay al menos una pareja cuya suma es $2n + 1$.

EJERCICIO 10 Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ probar que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & (3^n - 2^n) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$