

Matemática Discreta I

Primer Parcial del curso 2006

Viernes 6 de octubre de 2006

N. de parcial

Apellidos

Cédula de Identidad

RESPUESTAS (llenar)								No llenar	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

La prueba es sin material (ni calculadoras ni libros ni apuntes) y dura 4 horas.

Son 10 preguntas: 8 múltiple opción y 2 de desarrollo.

Todos las preguntas valen 4 puntos y no se restan puntos.

Toda la información extra sobre el parcial será publicada en la web¹.

EJERCICIO 1 Se consideran los símbolos 1,2,3,4,5 y A,B,C,D,E ¿Cuál es la cantidad de palabras distintas que se obtienen al permutar todos ellos si los 5 números mantienen su orden natural y las 5 letras también? Por ejemplo: A1B2C3D45E es una palabra válida pero ni 1235ABCDE4 ni B1234ACDE5 ni B1235ACDE4 lo son.

Opciones: A) $\frac{10!}{5!}$; B) $\frac{10!}{2}$; C) $\frac{10!}{(5!)^2}$; D) $(5!)^2$; E) $\left(\frac{10!}{5!}\right)^2$.

EJERCICIO 2 ¿Cuál es el coeficiente de x^9 en el desarrollo de $(-x^2 + 2x + 3)^6$?

Opciones: A) -100; B) -4; C) 20; D) 220; E) 340.

EJERCICIO 3 ¿Cuántas soluciones distintas en los enteros no negativos tiene la ecuación

$$4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \quad ?$$

Opciones:

- A) C_5^7 .
- B) $\frac{1}{4}C_4^{16}$.
- C) $C_3^{15} + C_3^{11} + C_3^7 + 1$.
- D) $C_4^{16} - 36$.
- E) C_4^{16} .

¹<http://imerl.fing.edu.uy/md1/>

EJERCICIO 4 En una reunión hay 4 matrimonios. Se quiere sacar una foto con las 4 mujeres sentadas en un sofá y los 4 maridos parados atrás de ellas pero de forma tal que ningún hombre esté detrás de su respectiva esposa. ¿Cuántas fotos distintas se pueden tomar?

Opciones: A) 9; B) 24; C) 216; D) 288; E) 576.

EJERCICIO 5 Un grupo de niños va al parque. Algunos van al trencito, otros a la rueda gigante y otros a la calesita. 60 de ellos fueron al menos a 2 juegos y 20 de ellos fueron a los 3 juegos. Si se gastó \$2350, cada entrada vale \$10 y todos subieron a algún juego, ¿cuántos niños eran? (Aclaración: cada niño sube a lo más una vez a un juego dado)

Opciones: A) 115; B) 155; C) 175; D) 235; E) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 6 Sea a_n = cantidad de cadenas de largo n formadas con los dígitos 1,2,3,4,5,6 tales que los números pares no son vecinos. Hallar a_5 .

Opciones: A) $3 \cdot 3^5$; B) $5 \cdot 3^5$; C) $8 \cdot 3^5$; D) $13 \cdot 3^5$; E) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 7 Sea la ecuación $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} + 6a_n = (4 - 6n)4^n$ con α constante. Hallar a_{100} si $a_0 = 0$, $a_1 = -1$ y se sabe que α es tal que $b_n = n4^n$ es solución de la ecuación.

Opciones: A) $1 - 6^{100} + 100 \cdot 4^{100}$; B) $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}6^{100} + 100 \cdot 4^{100}$; C) $\frac{11}{5} - \frac{1}{5}6^{101}$; D) $100 \cdot 4^{100}$; E) $-1 + 6^{100} + 100 \cdot 4^{100}$.

EJERCICIO 8 Si a_n cumple $(n + 1)a_0 + na_1 + \dots + 2a_{n-1} + a_n = 2^n \forall n \geq 0$, entonces su función generatriz es (*Sugerencia*: recordar convolución de sucesiones):

Opciones: A) $\frac{(1-x)^2}{1-2x}$; B) $\frac{1-2x}{(1-x)^2}$; C) $\frac{1-x^2}{1-2x}$; D) $\frac{1-x}{x(1-2x)}$; E) $\frac{(1-x)^2}{x(1-2x)}$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

EJERCICIO 9 En cada cuadradito de un tablero 4×4 se coloca el número 1 o el 0 o el -1. Probar que hay al menos dos líneas (filas, columnas y las 2 diagonales) que suman lo mismo.

EJERCICIO 10 Demostrar que para todo número real $x \neq 1$ y todo natural $n \geq 1$ se cumple que:

$$x + 2x^2 + \dots + nx^n = \left(n - \frac{1}{x-1}\right) \frac{x^{n+1}}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2}.$$