

Matemática Discreta I

Primer Parcial del curso 2006

Viernes 6 de octubre de 2006

SOLUCION

RESPUESTAS (llenar)								No llenar	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	C	C	B	D	A	A		

La prueba es sin material (ni calculadoras ni libros ni apuntes) y dura 4 horas.

Son 10 preguntas: 8 múltiple opción y 2 de desarrollo.

Todos las preguntas valen 4 puntos y no se restan puntos.

Toda la información extra sobre el parcial será publicada en la web¹.

EJERCICIO 1 Se consideran los símbolos 1,2,3,4,5 y A,B,C,D,E ¿Cuál es la cantidad de palabras distintas que se obtienen al permutar todos ellos si los 5 números mantienen su orden natural y las 5 letras también? Por ejemplo: A1B2C3D45E es una palabra válida pero ni 1235ABCDE4 ni B1234ACDE5 ni B1235ACDE4 lo son.

Opciones: A) $\frac{10!}{5!}$; B) $\frac{10!}{2}$; C) $\frac{10!}{(5!)^2}$; D) $(5!)^2$; E) $\left(\frac{10!}{5!}\right)^2$.

SOLUCIÓN: Cantidad de palabras = cantidad de formas de elegir posiciones para los números 1,2,3,4,5 (las letras A,B,C,D,E van en orden en las posiciones restantes) = formas de elegir 5 números del 1 al 10 = C_5^{10} .

EJERCICIO 2 ¿Cuál es el coeficiente de x^9 en el desarrollo de $(-x^2 + 2x + 3)^6$?

Opciones: A) -100; B) -4; C) 20; D) 220; E) 340. **SOLUCIÓN:**

$$(-x^2 + 2x + 3)^6 = \sum_{n_1+n_2+n_3=6} \frac{6!}{n_1!n_2!n_3!} (-x^2)^{n_1} (2x)^{n_2} 3^{n_3}$$

Buscamos el coeficiente de x^9 , o sea aquellos aportados por los $n_1 + n_2 + n_3 = 6$ tales que $2n_1 + n_2 = 9$.

$$n_1 = 4, n_2 = 1, n_3 = 1 \text{ aporta } \frac{6!}{4!1!1!} (-1)^4 \cdot 2^1 \cdot 3^1 = 6! \frac{6}{24} = 6! \frac{1}{4}$$

$$n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 0 \text{ aporta } \frac{6!}{3!3!0!} (-1)^3 \cdot 2^3 \cdot 3^0 = -6! \frac{8}{36} = -6! \frac{2}{9}$$

Si $n_1 \leq 2 \Rightarrow n_2 \geq 5 \Rightarrow \nexists n_3 \geq 0 : n_1 + n_2 + n_3 = 6$.

El coeficiente es por lo tanto $6!$

$$6! \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{9} \right) = \frac{6!}{36} (9 - 8) = 20.$$

¹<http://imerl.fing.edu.uy/md1/>

EJERCICIO 3 ¿Cuántas soluciones distintas en los enteros no negativos tiene la ecuación

$$4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \quad ?$$

Opciones:

- A) C_5^7 .
- B) $\frac{1}{4}C_4^{16}$.
- C) $C_3^{15} + C_3^{11} + C_3^7 + 1$.
- D) $C_4^{16} - 36$.
- E) C_4^{16} .

SOLUCIÓN: Equivale a encontrar el coeficiente de x^{12} en

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^4 (1 + x^4 + x^8 + \dots) = \frac{1}{(1-x)^4} \frac{1}{1-x^4}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-4} (-x)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{n+3} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} \right)$$

$$c_{12} = 1 + C_3^7 + C_3^{11} + C_3^{15}$$

EJERCICIO 4 En una reunión hay 4 matrimonios. Se quiere sacar una foto con las 4 mujeres sentadas en un sofá y los 4 maridos parados atrás de ellas pero de forma tal que ningún hombre esté detrás de su respectiva esposa. ¿Cuántas fotos distintas se pueden tomar?

Opciones: A) 9; B) 24; C) 216; D) 288; E) 576.

SOLUCIÓN: Fotos posibles = (Órdenes de esposas).(Desórdenes de esposos) = $4!d_n = (4!)^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = 24(12 - 4 + 1) = 216$

EJERCICIO 5 Un grupo de niños va al parque. Algunos van al trencito, otros a la rueda gigante y otros a la calesita. 60 de ellos fueron al menos a 2 juegos y 20 de ellos fueron a los 3 juegos. Si se gastó \$2350, cada entrada vale \$10 y todos subieron a algún juego, ¿cuántos niños eran? (Aclaración: cada niño sube a lo más una vez a un juego dado)

Opciones: A) 115; B) 155; C) 175; D) 235; E) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIÓN: Cantidad de niños = Número total de entradas - cantidad de niños que fueron a 2 juegos - 2. cantidad de niños que fueron a 3 juegos = $235 - 40 - 2 \cdot 20 = 155$

EJERCICIO 6 Sea a_n = cantidad de cadenas de largo n formadas con los dígitos 1,2,3,4,5,6 tales que los números pares no son vecinos. Hallar a_5 .

Opciones: A) $3 \cdot 3^5$; B) $5 \cdot 3^5$; C) $8 \cdot 3^5$; D) $13 \cdot 3^5$; E) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIÓN: Si se coloca un 0 por cada par y un 1 por cada impar obtenemos una sucesión de 0s y 1s sin 0s seguidos, cuya cantidad es verifica la ecuación de Fibonacci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (Ejer 5.2 del práctico 3). Luego que se tiene una tal sucesión basta elegir por cada 0 entre los tres pares, 2, 4 o 6 y por cada 1 entre los tres impares 1,3 o 6, sí tenemos 3^n posibles elecciones. El número total será $a_5 = 3^5 f_5$ como $f_1 = 2$ y $f_2 = 4 - 1 = 3$, tenemos que $f_3 = 5$, $f_4 = 8$ y $f_5 = 13$. Así la respuesta es $13 \cdot 3^5$.

EJERCICIO 7 Sea la ecuación $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} + 6a_n = (4 - 6n)4^n$ con α constante. Hallar a_{100} si $a_0 = 0$, $a_1 = -1$ y se sabe que α es tal que $b_n = n4^n$ es solución de la ecuación.

Opciones: A) $1 - 6^{100} + 100 \cdot 4^{100}$; B) $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}6^{100} + 100 \cdot 4^{100}$; C) $\frac{11}{5} - \frac{1}{5}6^{101}$;
D) $100 \cdot 4^{100}$; E) $-1 + 6^{100} + 100 \cdot 4^{100}$.

SOLUCIÓN: Como b_n es solución, se obtiene que

$$(n + 2)4^{n+2} - \alpha(n + 1)4^{n+1} + 6n4^n = (4 - 6n)4^n$$

lo que implica $\alpha = 7$. Obtenemos entonces que $a_n = A + B6^n + n4^n$. Usando las condiciones iniciales, tenemos que $0 = A + B$ y $-1 = A + 6B + 4$, por lo que $A = 1$ y $B = -1$

EJERCICIO 8 Si a_n cumple $(n + 1)a_0 + na_1 + \dots + 2a_{n-1} + a_n = 2^n \forall n \geq 0$, entonces su función generatriz es (*Sugerencia*: recordar convolución de sucesiones):

Opciones: A) $\frac{(1-x)^2}{1-2x}$; B) $\frac{1-2x}{(1-x)^2}$; C) $\frac{1-x^2}{1-2x}$; D) $\frac{1-x}{x(1-2x)}$; E) $\frac{(1-x)^2}{x(1-2x)}$.

SOLUCIÓN: Tenemos que $c_n = \sum_{k=0}^n b_{n-k}a_k = \sum_{k=0}^n (n+1-k)a_k = 2^n$, con $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1})' = (\frac{1}{1-x} - 1)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{(1-x)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-2x}$$

lo que implica que la función generatriz de los a_n es $\frac{(1-x)^2}{1-2x}$

EJERCICIOS DE DESARROLLO

EJERCICIO 9 En cada cuadradito de un tablero 4×4 se coloca el número 1 o el 0 o el -1. Probar que hay al menos dos líneas (filas, columnas y las 2 diagonales) que suman lo mismo.

SOLUCIÓN: Hay 4 filas + 4 columnas + 2 diagonales = 10 líneas. Y $9 = |\{-4, \dots, 4\}|$ resultados posibles. Por el principio de palomar, hay al menos dos líneas con el mismo resultado.

EJERCICIO 10 Demostrar que para todo número real $x \neq 1$ y todo natural $n \geq 1$ se cumple que:

$$x + 2x^2 + \dots + nx^n = \left(n - \frac{1}{x-1}\right) \frac{x^{n+1}}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2}.$$

SOLUCIÓN: Demostración usando funciones generatrices:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kx^k &= x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = x \left(\sum_{k=0}^n x^k \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \right)' \\ &= x \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{(n+1)x^n}{x-1} - \frac{x^{n+1}}{(x-1)^2} \right) = \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{x^{n+1}}{x-1} \left(n - \frac{1}{x-1} \right) \end{aligned}$$

Demostración por inducción: $n = 1$)

$$\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \frac{x^2}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 2x + x}{(x-1)^2} = x$$

$n \Rightarrow n + 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \left(n - \frac{1}{x-1}\right) \frac{x^{n+1}}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} + (n+1)x^{n+1} \\ &= \left(n - \frac{1}{x-1} + (n+1)(x-1)\right) \frac{x^{n+1}}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} \\ &= \left((n+1)x - \frac{x}{x-1}\right) \frac{x^{n+1}}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$