

# Matemática Discreta I

Primer Parcial del curso 2007

Sábado 6 de octubre de 2007

## Soluciones

RESPUESTAS (llenar)								No llenar	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	Ninguna*	C	B	C	D	B	B		

\* Debido a que el Ejercicio 2 no tenía ninguna opción correcta, se considerará bien contestado a todos.

La prueba es sin material (ni calculadoras ni libros ni apuntes) y dura 4 horas.

Son 10 preguntas: 8 múltiple opción y 2 de desarrollo.

Todos las preguntas valen 4 puntos y no se restan puntos.

Toda la información extra sobre el parcial será publicada en la web<sup>1</sup>.

**EJERCICIO 1** ¿Cuántas palabras distintas pueden escribirse con las letras de la palabra PALABRITAS si las letras LIB deben aparecer juntas (en cualquier orden) y se debe empezar con la letra T? Opciones: A) 120; B) 720; C) 840; D) 5040; E) 40320.

**SOLUCIÓN:** La T la pongo al principio (tengo una sola forma de hacerlo), luego tomo las letras LIB como si fueran una sola letra nueva Z, y permuto de  $(10 - 1 - 3 + 1)!/3!$  porque la A está repetida 3 veces. Luego permuto las letras de LIB  $3!$ , total  $7! = 5040$ .

**EJERCICIO 2** La cantidad de maneras distintas de colocar  $2N + 1$  pelotas idénticas en 3 cajas distintas, de modo que 2 cajas cualesquiera juntas contengan más pelotas que la restante es:

Opciones:

- A)  $C_2^{N+2}$ .
- B)  $3C_2^{N+2}$ .
- C)  $C_2^{2N+2}$ .
- D)  $C_2^{2N+3} - C_2^{N+2}$ .
- E)  $C_2^{2N+3}$ .

**SOLUCIÓN:** Cuento el complemento: debe haber una caja con más de la mitad de pelotitas, es decir con  $N + 1$  o más. Si fuera la caja 1 sería la cantidad de soluciones de  $x_1 + x_2 + x_3 = 2N + 1$  con  $x_1 \geq N + 1$  que es  $CR_{2N+1-(N+1)}^3 = C_N^{N+2} = C_2^{N+2}$ . Como puede ser cualquiera de las 3 caja es  $3C_2^{N+2}$ . Como el total es  $CR_{2N+1}^3 = C_{2N+1}^{2N+3} = C_2^{2N+3}$ , ninguna es correcta.

**EJERCICIO 3** ¿Cuántas funciones sobreyectivas de un conjunto de  $n$  elementos a uno con  $n - 1$  hay?

<sup>1</sup><http://imerl.fing.edu.uy/matdisc1/>

Opciones:

- A)  $n!/2$ .
- B)  $(n-1)!$ .
- C)  $n! \times (n-1)/2$ .
- D)  $C_2^n \times n!$ .
- E)  $n! \times (n-1)$ .

SOLUCIÓN: Como el dominio tiene exactamente un elemento más que el codominio, existirá exactamente un par de elementos cuya imagen es la misma. Hay  $C_2^n$  formas de elegir dichos pares, luego los consideramos como si fuera un solo elemento y tenemos un conjunto con  $n-1$  elementos, pero  $Sob(n-1, n-1) = (n-1)!$ , así el total es  $C_2^n(n-1)!$ .

EJERCICIO 4 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$  si los  $x_i$  son enteros no negativos,  $x_1$  es impar y  $x_2$  par? Opciones: A) 35; B) 70; C) 71; D) 72; E) 73.

SOLUCIÓN: Como  $x_1$  es impar es de la forma  $2y_1 + 1$ . Como  $x_2$  es par, es de la forma  $2y_2$ . así tenemos  $2y_1 + 1 + 2y_2 + x_3 + x_4 = 10$  es decir  $2y_1 + 2y_2 + x_3 + x_4 = 9$ , por lo tanto  $x_3 + x_4$  es impar, por lo tanto o bien  $x_3$  es par y  $x_4$  es impar o bien  $x_3$  es par y  $x_4$  impar. Ambos casos son iguales, así que basta resolver uno y multiplicar por dos: si  $x_3$  es par y  $x_4$  es impar entonces  $x_3 = 2y_3$  y  $x_4 = 2y_4 + 1$  para ciertos  $y_3, y_4$ . Tenemos  $2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 1 = 9$  se decir  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4$ , que tiene  $CR_4^4 = C_3^7 = 35$  soluciones. Así el total es  $2 \times 35 = 70$ .

EJERCICIO 5 En una investigación se pregunta a las personas sobre sus hábitos de consumo de tabaco (T), alcohol (A), café (C) y alimentos ricos en grasas (G). Los resultados se muestran en la siguiente tabla de hábitos de consumo y cantidad de personas que tienen dicho hábito:

T	A	C	G	TA	TC	TG
10	12	13	17	6	8	7
AC	AG	CG	TAC	TAG	TCG	ACG
7	8	7	5	4	5	4
TACG						
3						

Si todas las personas participantes tienen al menos uno de los hábitos de consumo, ¿Cuántas personas participaron en el estudio? Opciones: A) 17; B) 21; C) 24; D) 27; E) 52. SOLUCIÓN: Aplicamos el principio de inclusión exclusión y el cardinal de la unión será  $T + A + C + G - TA - TC - TG - AC - AG - CG + TAC + TAG + TCG + ACG - TACG = 10 + 12 + 13 + 17 - 6 - 8 - 7 - 7 - 8 - 7 + 5 + 4 + 5 + 4 - 3 = 24$

EJERCICIO 6 Una partícula se mueve sobre el eje  $\vec{ox}$  de modo tal que la distancia que recorre cada segundo es el doble de la que recorrió el segundo anterior. Sea  $a_n$  la posición de la partícula en el n-simo segundo. Se sabe que  $a_0 = 3$  y  $a_3 = 10$ . Entonces  $a_n$  está dada por.

Opciones:

- A)  $7n + 3$ .

- B)  $(21n + 72)/26$ .
- C)  $2^n - 2$ .
- D)  $2^n + 2$ .
- E)  $2^{n+1} + 1$ .

SOLUCIÓN: Definamos  $b_n = a_n - a_{n-1}$ , entonces  $b_n = 2b_{n-1}$ , de donde  $b_n = 2^{n-1}b_1$ . Pero  $a_n = a_0 + b_1 + \dots + b_n = a_0 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1}b_1 = 3 + (2^n - 1)b_1$ . Basta hallar  $b_1$ . Para ello imponemos la condición  $a_3 = 10 = 3 + (2^3 - 1)b_1$  de donde  $b_1 = 1$  y  $a_n = 3 + 2^n - 1 = 2^n + 2$ .

EJERCICIO 7 Se considera la ecuación  $2a_{n+2} + \alpha a_{n+1} + \beta a_n = 2 \cdot 3^n$  para  $n \geq 0$ , y sabemos que  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 10$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros desconocidos. Opciones:

- A)  $(7^{1003} - 3^{2007})/2$ .
- B)  $(-7^{1003} + 3^{2007})/2$ .
- C)  $(7^{1003} + 3^{2007})/2$ .
- D)  $(7^{2007} - 3^{1003})/2$ .
- E)  $7^{1003} + 3^{2007}$ .

SOLUCIÓN: Primero imponemos las condiciones iniciales para despejar  $\alpha$  y  $\beta$ :  $2a_2 + \alpha a_1 + \beta a_0 = 2 \cdot 3^0 \Rightarrow 2 + \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow 2a_3 + \beta a_1 = 2 \cdot 3^1 \Rightarrow 20 + \beta = 6 \Rightarrow \beta = -14$ . Por lo que la ecuación queda  $2a_{n+2} - 14a_n = 2 \cdot 3^n$  o sea  $a_{n+2} - 7a_n = 3^n$ . Definiendo  $b_n = 7^{-n}a_{2n+1}$  tenemos que  $b_{n+1} = 7^{-(n+1)}a_{2n+1+2} = 7^{-(n+1)}(7a_{2n+1} + 3^{2n+1}) = 7^{-n}a_{2n+1} + 3^{2n+1}7^{-(n+1)} = b_n + (3/7)(9/7)^n$ , de donde,  $b_n = b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (3/7)(9/7)^k = 1 + (3/7)[(9/7)^n - 1]/(9/7 - 1) = 1 + 3[(9/7)^n - 1]/2 = [3(9/7)^n - 1]/2$ , por lo tanto  $a_{2007} = a_{2 \cdot 1003 + 1} = 7^{1003}b_{1003} = 7^{1003}[3(9/7)^{1003} - 1]/2 = (3 \cdot 9^{1003} - 7^{1003})/2 = (3^{2007} - 7^{1003})/2$ .

EJERCICIO 8 Encuentre la función generatriz de la sucesión  $a_0, a_1, a_2, \dots$  donde

$$a_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}.$$

(Sugerencia: considerar la convolución de sucesiones)

Opciones:

- A)  $e^x$ .
- B)  $e^x/(1-x)$ .
- C)  $e^x/(1+x)$ .
- D)  $\log(1+x)$ .
- E)  $-\log(1-x)$ .

SOLUCIÓN: De la definición de  $a_n$  surge que su función generatriz es la función generatriz de  $1/n!$  por el "operador suma"  $1/(1-x)$ . Como la función generatriz de  $1/n!$  es  $e^x$ , la respuesta es  $e^x/(1-x)$ .

## EJERCICIOS DE DESARROLLO

EJERCICIO 9 Para se define  $S_n$  por la fórmula

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}.$$

- (a) Compute  $S_n$  para  $n=1, 2, 3$ .  
(b) Conjeture una fórmula para  $S_n$  y demuéstrela por el principio de inducción completa.

SOLUCIÓN: (a)  $S_1 = \frac{1}{2!} = 1/2$ ,  $S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = 1/2 + 1/3 = 5/6$  y  $S_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = 5/6 + 3/4! = 23/24$ . (b)  $S_n = 1 - 1/(n+1)!$ . Demostración: caso base parte (a). Paso inductivo:  $S_n = S_{n-1} + n/(n+1)! = 1 - 1/n! + n/(n+1)! = 1 - (n+1-n)/(n+1)! = 1 - 1/(n+1)!$  Como se quería demostrar.

EJERCICIO 10 Sea  $n$  un natural positivo. Demuestre que entre  $n+2$  enteros cualesquiera, hay dos cuya diferencia o cuya suma es divisible por  $2n$ .

*Sugerencia:* Recordar que todo entero es de la forma  $2nq + r$  para cierto cociente  $q$  y resto  $r$  enteros con  $0 \leq r < 2n$ .

SOLUCIÓN: Sean  $n+2$  enteros  $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ . Formemos sus restos correspondientes  $r_1, \dots, r_{n+2}$ . Hay  $2n-1$  restos posibles,  $r = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ . Si dos de los números tienen el mismo resto entonces su diferencia es múltiplo de  $2n$ : efectivamente si  $r_i = r_j$  entonces  $x_i - x_j = (2nq_i + r_i) - (2nq_j + r_j) = 2n(q_i - q_j)$  siendo  $(q_i - q_j)$  entero. Así que o bien la resta es múltiplo de  $2n$  o bien todos tiene restos distintos. Pero si esto último sucede deben haber dos restos cuya suma de  $2n$  pues formamos los  $n+1$  "palomares"  $\{0\}, \{1, 2n-1\}, \{2, 2n-2\}, \dots, \{n-1, n+1\}, \{n\}$ , entonces dos de las  $n+2$  "palomas",  $r_i$ , deberán ir al mismo palomar. Sean  $r_i$  y  $r_j$  dichas palomas, entonces  $x_i + x_j = (2nq_i + r_i) + (2nq_j + r_j) = 2n(q_i + q_j + 1)$  siendo  $q_i + q_j + 1$  entero.