Matemática Discreta I

Segundo Parcial del curso 2006

SOLUCIÓN

Martes 5 de diciembre de 2006

RESPUESTAS (llenar)								No llenar	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	D	C	B	C	D	D	C		

ACLARACIÓN
No hay puntos negativos y cada respuesta correcta vale 6 puntos. No se puede usar material. Toda la información extra sobre el parcial será publicada en la web[1].

EJERCICIO 1 Se considera el grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $\{a, b\} \in E$ si $a = 1$ y $b \in \{2, 3, 4, 5\}$ o $a = 8$ y $b \in \{5, 6, 7\}$. Se considera el conjunto H formado por todos los subgrafos de G que son isomorfos a algún P_n. Definimos en H la relación R de orden tal que $\forall\, C_1, C_2 \in H$ se tiene $C_1\, R\, C_2$ si todas las aristas de C_1 están en C_2. Con este orden parcial, ¿cuántos elementos maximales tiene H?
Opciones: A) 3; B) 5; C) 6; D) 7; E) 10.

SOLUCIÓN: Por simetría agrupamos las aristas en cuatro tipos: $T_1 = \{12, 13, 14\}$, $T_2 = \{15\}$, $T_3 = \{58\}$ y $T_4 = \{86, 87\}$. Si el camino contiene dos aristas de T_1 será maximal, lo mismo si contienen las dos aristas de T_4, esto nos dá $3+1 = 4$ caminos. Si un camino es maximal y contiene una sola arista de T_1 debe contener las aristas 15 y 58 y una arista de T_4, esto nos da $|T_1| \times |T_2| = 6$ caminos. En total serán $4 + 6 = 10$ caminos maximales.

EJERCICIO 2 Sea A el conjunto de grafos (sin lazos ni aristas múltiples) no isomorfos conexos con 4 vértices. Sea R la relación definida en A por: $G\, R\, G'$ si existen, v y v' vértices de G y G' respectivamente tales que $G - v$ es isomorfo a $G' - v'$.

Opciones:
A) R es de equivalencia y $|A/R| = 2$.
B) R no es de equivalencia y $|A| = 7$.
C) R es reflexiva y transitiva y $|A| = 6$.
D) R es reflexiva y simétrica y $|R| = 30$.
E) R es simétrica y transitiva y $|R| = 24$.

SOLUCIÓN: Una búsqueda exhaustiva nos da $|A| = 6$ grafos: $G_1 = P_4$, $G_2 = K_{1,3}$, $G_3 = C_3$ con un vértice colgante, $G_4 = C_4$, $G_5 = K_4$ menos una arista cualquiera, $G_6 = K_4$. Por otro lado $G_6 R G_5 R G_4$ pero $(G_6, G_4) \notin R$. Por lo tanto no es transitiva, así es la opción D.

EJERCICIO 3 Hallar el mínimo m tal que la siguiente afirmación es verdadera: Existen m aristas de K_6 tal que si las quitamos el grafo resultante tiene un circuito euleriano.
Opciones: A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) Ninguna de las anteriores. SOLUCIÓN: Son 3 ya que los grados de los vértices de K_6 son todos 5, cada vez que sacamos una arista creamos a lo sumo dos vértices con grado par, al haber

[1] *http://www.fing.edu.uy/ webimerl/discreta1/principal.htm*

6 vértices, necesitamos realiza la operación $6/2 = 3$ veces como mínimo. De hecho se puede hacer y queda un grafo conexo con todos sus vértices pares.

EJERCICIO 4 Hallar el número de vértices de un grafo G si tiene 10 aristas, dos de sus vértices son de grado 4, y los restantes son de grado 3.
Opciones: A) 4; B) 6; C) 8; D) 10; E) 12. SOLUCIÓN: Por la fórmula de los grados tenemos que si n es la cantidad de vértices de grado 3 entonces $2 \times 4 + n \times 3 = 2 \times 10$, por lo tanto $n = 4$ y son $2 + 4 = 6$ vértices

EJERCICIO 5 Se considera el grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $\{a, b\} \in E$ si $a \neq b$ y $a + b$ es un número primo. Se consideran las afirmaciones:

1. G es plano.
2. G tiene circuito euleriano.
3. $|E| = 10$.
4. G es bipartito.

El número de afirmaciones verdaderas es:
Opciones: A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

SOLUCIÓN: El grafo se plano, no es euleriano (el vértice 1 tiene grado 3), tiene 9 aristas y es bipartito ($V = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6\}$). Por lo tanto son 2 afirmaciones correctas.

EJERCICIO 6 ¿Cuántos árboles distintos (algunos pueden ser isomorfos a otros) se pueden formar con los ocho vértices $\{1, 2, \ldots, 8\}$ de manera que dos de los vértices tengan grado 4, y los restantes tengan grado 1?
Opciones: A) 100; B) 124; C) 230; D) 560; E) 1792. SOLUCIÓN: Existe un único árbol a menos de isomorfismos con dicha característica: aquel en el cual los vértices de grado 4 son adyacentes y ambos tienen tres hojas. Por lo tanto basta contar de cuantas formas se los puede etiquetar de forma de obtener grafos distintos. Una forma de hacer es la siguiente: Paso 1) elijo dos dos vértices de grado 4 de $C^8_2 = 28$ formas distintas. 2) elijo el conjuntos de tres hojas que irán colgadas del menor de los vértice grado 4 de $C^{8-2}_3 = 20$ formas posibles, Paso 3) cuelgo el resto de los vértice del otro vértice de grado 4 (hay una sola forma de hacerlo). En total serían $28 \times 20 \times 1 = 560$.

EJERCICIO 7 Se considera el grafo que se obtiene al tomar 5 triángulos con exactamente 1 vértice común (tiene 11 vértices y 15 aristas). ¿Cuántos árboles recubridores tiene este grafo?
Opciones: A) 10; B) 15; C) 32; D) 243; E) 1024. SOLUCIÓN: A cada triángulo se le debe sacar una de sus arista, no se pueden sacar más pues sino se desconectaría uno de los vértices. Así tenemos 3 opciones por cada triángulo. Total: $3^5 = 243$.

EJERCICIO 8 ¿Cuántos subgrafos de $K_{2,3}$ son homeomorfos a $K_{1,3}$?
Opciones: A) 2; B) 6; C) 8; D) 16; E) 48.

SOLUCIÓN: Hay solo dos vértices de grado 3 en $K_{2,3}$, ambos deberán corresponder al único vértice de grado 3 de un grafo homeomorfo de $K_{1,3}$. Hay dos subgrafos isomorfos a $K_{1,3}$. A cada no de ellos se le puede agregar a lo sumo una arista más de las tres posibles, porque sino se formaría un ciclo. Así tenemos $2 \times 3 = 6$ subgrafos más isomorfos a una subdivisión elemental de $K_{1,3}$. Total $2 + 6 = 8$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

EJERCICIO 9 En una reunión de 20 personas hay en total 48 pares de personas que se conocen. Justificar por qué hay al menos una persona que a lo sumo conoce a cuatro personas.

SOLUCIÓN: Cada persona la representamos por un vértice y los pares de personas conocidas por aristas. Si no hubiera ninguna persona con 4 o menos conocidos, todos los vértice del grafo tendrían grado 5 o más. Aplicando la fórmula de los grados tendríamos que

$$2 \times 48 = \sum_{v \in V} grado(v) \geq \sum_{v \in V} 5 = 5 \times |V| = 5 \times 20 = 100.$$

Lo cual es absurdo.

EJERCICIO 10 Sea (C, R) un conjunto parcialmente ordenado con un mínimo m y tal que todo subconjunto no vacío posee supremo. Sea $f : C \longrightarrow C$ creciente, es decir, tal que $x \, R \, y$ implica $f(x) \, R \, f(y)$. Se pide

1. Demostrar que existe el supremo de $S = \{x : x \, R \, f(x)\}$. Llamémosle p.
2. Demostrar que para todo $x \in S$, se cumple que $f(x) \, R \, f(p)$.
3. Justificar los cuatro pasos marcados con $*_1$, $*_2$, $*_3$ y $*_4$.

   $\forall x \in S, f(x) \, R \, f(p) \overset{*_1}{\Longrightarrow} f(p)$ es cota superior de $S \overset{*_2}{\Longrightarrow} p \, R \, f(p) \overset{*_3}{\Longrightarrow} f(p) \in S \overset{*_4}{\Longrightarrow} f(p) = p$.

SOLUCIÓN:

1. Basta demostrar que S no es vacío. Para ello demostraremos que $m \in S$. Efectivamente, como m es mínimo, entonces $mRf(m)$ por lo tanto pertenece a S.
2. Sabemos que si $x \in S$ entonces xRp lo cual implica que al ser f creciente $f(x)Rf(p)$.
3. ($*_1$) $x \in S \Longrightarrow xRf(x)$, pero $f(x)Rf(p)$, por lo tanto (transitiva), $xRf(p)$.

   ($*_2$) Como p es supremo, estará relacionado con todas las cotas superiores, por lo tanto $pRf(p)$

   ($*_3$) Es por la definición de S.

   ($*_4$) Si $f(p) \in S$ entonces $f(p)R\sup(S) = p$, pero ya sabíamos que $pRf(p)$, por lo tanto usando la antisimétrica, $p = f(p)$.