

# Matemática Discreta I

Segundo Parcial del curso 2007

Miércoles 5 de diciembre de 2007

## SOLUCIÓN

RESPUESTAS (llenar)								No llenar	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	D	E	B	D	C	D	D		

### ACLARACIÓN

No hay puntos negativos y cada respuesta correcta vale 6 puntos. No se puede usar material.

**EJERCICIO 1** Sean las siguientes relaciones en  $\mathbb{N}$ :

$$R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a - b \text{ es un entero par}\},$$

$$R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a - b \text{ es un entero impar}\},$$

$$R_3 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \text{ es múltiplo de } b\}.$$

Opciones:

A)  $R_1, R_2$  y  $R_3$  son de equivalencia.

B)  $R_1$  y  $R_3$  son de equivalencia y  $R_2$  no es reflexiva.

C)  $R_1$  y  $R_3$  son ordenes parciales y  $R_2$  no es reflexiva.

D)  $R_1$  es de equivalencia,  $R_3$  es de orden parcial y  $R_2$  es transitiva.

E)  $R_1$  es de equivalencia,  $R_3$  es un orden parcial y  $R_2$  es simétrica.

SOLUCIÓN:  $R_1$  es de equivalencia (Ej 7 practico 5),  $R_2$  no es reflexiva ya que  $n - n = 0$  es par siempre, ni transitiva, ya que  $5 - 4 = 1$  impar,  $4 - 3 = 1$  impar, pero  $5 - 3 = 2$  par.  $R_2$  es simétrica ya que  $n$  impar implica  $-n$  impar.  $R_3$  es un orden parcial (fácil de verificar). Por lo tanto es la opción E.

**EJERCICIO 2** Sea  $R$  un retículo con cinco elementos con exactamente una anticadena con 2 elementos. ¿Cuántas cadenas con 3 elementos tiene?

Opciones: A) 4; B) 5; C) 6; D) 7; E) 8.

SOLUCIÓN: Supongamos que la anticadena es  $\{a, b\}$ . Sea  $i$  y  $s$  el ínfimo y el supremo de  $\{a, b\}$  respectivamente. En el diagrama de Hasse correspondiente aparecerá un rombo con vértices  $i, a, s, b$ . Basta "coloca" el quinto elemento  $e$ . Como hay una sola anticadena con dos elementos, o bien  $eRa$  o bien  $aRe$ . Por la misma razón o bien  $eRb$  o bien  $bRe$ . Está claro que no se puede dar que  $eRa$  y  $bRe$  ni que  $aReRb$ , pues sino  $a$  y  $b$  estarían relacionados contradiciendo el hecho de que  $\{a, b\}$  es una anticadena. Por lo tanto o bien  $eRa$  y  $eRb$  o bien  $aRe$  y  $bRe$ . En

el primer caso  $e$  sería una cota inferior de  $\{a, b\}$  y por lo tanto  $eRi$ , mientras que en el segundo caso  $e$  sería una cota superior de  $\{a, b\}$  y por lo tanto  $sRe$ . Ambos casos son simétricos y la cantidad de cadenas con tres elementos es la misma. Por ejemplo para el primer caso ( $eRi$ ) las cadenas serían :  $\{e, i, a\}$ ,  $\{e, i, s\}$ ,  $\{e, a, s\}$ ,  $\{i, a, s\}$ ,  $\{e, i, b\}$ ,  $\{e, b, s\}$  y  $\{i, b, s\}$ , total siete cadenas.

**EJERCICIO 3** Sea el conjunto  $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ . Sea  $m$  la cantidad de relaciones de equivalencia sobre  $A$  que cumplen:

- $(1,2)$  pertenece a la relación;
- $(1,3)$ ,  $(1,4)$ , y  $(3,4)$  no pertenecen a la relación;
- $|[3]| = 3$  y  $|[4]| = 3$ .

Entonces  $m$  vale: Opciones: A) 180; B) 210; C) 270; D) 360; E) 450.

**SOLUCIÓN:** Paso 1) elegimos 2 elementos para poner en la clase del 3 de  $C_2^6 = 15$  formas distintas. Paso 2) elegimos otros 2 para poner en la clase del 4 de  $C_2^4 = 6$  formas distintas. Paso 3) distribuyo los otros 2 elementos que sobran según vayan o no a la clase del 1: o bien van los dos en la clase del 1 (una forma sola de hacerlo), o bien va uno y el otro no (2 formas de hacerlo) o bien no va ninguno (2 formas porque pueden formar una sola clase justos o bien dos clases). Total:  $15 \times 6 \times (1+2+2) = 450$ . Es decir, los conjuntos cocientes posibles son de la forma:  $\{\{3,a,b\}, \{4,c,d\}, \{1,2,e,f\}\}$  o bien  $\{\{3,a,b\}, \{4,c,d\}, \{1,2,e\}, \{f\}\}$  o bien  $\{\{3,a,b\}, \{4,c,d\}, \{1,2\}, \{e,f\}\}$  o bien  $\{\{3,a,b\}, \{4,c,d\}, \{1,2\}, \{e\}, \{f\}\}$ .

**EJERCICIO 4** ¿Cuántos grafos conexos no isomorfos (sin lazos ni aristas múltiples) con 5 vértices y exactamente 1 ciclo hay?

Opciones: A) 4; B) 5; C) 6; D) 7; E) 8.

**SOLUCIÓN:** La longitud del único ciclo puede ser 3, 4 o 5. Si es 5, hay un solo grafo y es  $C_5$ , pues cualquier arista que agreguemos creará otro ciclo. Si es 4, también hay un solo grafo que es  $C_4$  con el quinto vértice colgando. Si es 3, hay tres posibilidades:  $C_3$  con dos vértices colgando del mismo vértice, o  $C_3$  con dos vértices colgando de dos vértices distintos, o  $C_3$  con un camino de largo 2 colgando de un vértice. En total serían 5.

**EJERCICIO 5** Sea un grafo  $G$  con 2 caras de grado 3, 2 caras de grado 4, 1 cara de grado 5 y 1 cara de grado 7, plano conexo. Entonces: Opciones:

- A)  $G$  tiene necesariamente un ciclo Hamiltoniano.
- B)  $G$  tiene un subgrafo homeomorfo a  $K_5$ .
- C) La cantidad de vértices de  $G$  es par.

- D)  $G$  tiene necesariamente al menos un vértice de grado 2 o 1.  
 E) No existe  $G$  con tales características .

SOLUCIÓN: A es falsa como veremos luego. B no puede ser por Kuratowski. La cantidad de aristas  $e$  verifica  $2e = 2 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 5 + 1 \times 7 = 26 = 2 \times 13$ . C es falsa pues aplicando la fórmula de Euler tenemos que  $v = 2 + e - c = 2 + 13 - (2 + 2 + 1 + 1) = 9$ . D es cierta pues si todos los vértices tuvieran grado 3 o más entonces  $26 = 2e = \sum gr(v) \geq 3v = 27$  absurdo. E es falsa pues existe un tal grafo: tome un  $C_5$  con vértices del 1 al 5, colóque un vértice colgando del lado de afuera y adentro un  $K_3$  con vértices  $a, b$  y  $c$ . Conecte  $a$  con 1 y 2, y  $b$  con 3 y  $c$  con 5. El grafo resultante no es hamiltoniano pues tiene un vértice de grado 1.

**EJERCICIO 6** Considere las siguientes afirmaciones sobre  $K_{n,m}$ . Opciones:

- A)  $K_{n,m}$  es plano si y sólo si  $n$  y  $m$  son menores que 3.  
 B)  $K_{n,m}$  tiene circuito Euleriano si y sólo si  $n$  y  $m$  son impares.  
 C)  $K_{n,m}$  no tiene camino Hamiltoniano si  $|n - m| > 1$  .  
 D) Si  $m = n$  entonces es un grafo  $m$ -regular con  $m^2$  aristas e isomorfo a  $K_{2m}$  .  
 E)  $K_{n,m}$  nunca es un ciclo.

SOLUCIÓN: A es falsa pues  $K_{1,3}$  es plano. B es falsa pues  $K_{1,1} = K_2$  no es euleriano. C es cierta pues un grafo conexo bipartito es hamiltoniano solo si tiene la misma cantidad de vértices en cada partición. D es falsa pues  $K_{2m}$  posee  $m(2m - 1)$  aristas  $K_{m,m}$  solo  $m^2$ . E es falsa pues  $K_{2,2} = C_4$ .

**EJERCICIO 7** Sea  $G$  un árbol que tiene únicamente  $p$  vértices de grado 1 y  $q$  vértices de grado 4. ¿Qué relación hay entre  $p$  y  $q$ ?

- Opciones: A)  $p = q + 2$ ; B)  $p = 2q - 2$ ; C)  $p = 2q$ ; D)  $p = 2q + 2$ ; E)  $p = 2q + 4$ .

SOLUCIÓN:  $2(p + q - 1) = 2e = \sum gr(v) = p \times 1 + q \times 4 \Rightarrow p - 2q - 2 = 0$ . Por lo tanto es la opción D.

**EJERCICIO 8** Se considera el grafo que se obtiene al tomar 4 cuadrados ( $C_4$ ) con exactamente 1 vértice común (tiene 13 vértices y 16 aristas). ¿Cuántos grafos recubridores conexos tiene este grafo?

- Opciones: A) 125; B) 256; C) 257; D) 625; E)  $2^{16}$ .

SOLUCIÓN: Para que cada  $C_4$  se mantenga conexo se debe sacar una o ninguna arista. Hay 4 formas de sacar una arista y una forma de no sacar ninguna arista. En total hay 5 posibilidades por cada  $C_4$ . Por la regla del producto tendremos  $5^4 = 625$  posibles subgrafos.

---

## EJERCICIOS DE DESARROLLO

**EJERCICIO 9** Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $D$  el conjunto de grafos simples (sin lazos ni aristas múltiples) eulerianos cuyos vértices pertenecen a  $X$  es decir:

$$D = \{G = (V, E) : V \subseteq X \text{ y } G \text{ admite un circuito Euleriano}\}.$$

Considere la relación  $R \subset D \times D$  definida por:  $G_1 R G_2$  si y sólo si  $G_1$  es subgrafo de  $G_2$  o existe una arista  $e$  de  $G_1$ , tal que  $G_1 - e$  es subgrafo de  $G_2$ .

- i) Hallar todos los elementos no isomorfos de  $D$ .  
 ii) Decir si  $R$  es reflexiva, antisimétrica y/o transitiva. Justificar en cada caso.

**SOLUCIÓN:** (i) El cardinal de  $V$  puede ser 3, 4 o 5. Los grado de los vértices pueden ser 2 o 4, sino no serían eulerianos. Con cardinal 3 tenemos solo grafos isomorfos a  $C_3$ , con cardinal 4 solo grafos isomorfos a  $C_4$ . Con cardinal 5 tenemos varios: si todos los vertices tienen grado 2 es  $C_5$ , si un vértice tiene grado 4 y los otros grado 2, son dos  $C_3$  con un vértice en común. Si hay dos vertices con grafo 4 y tres con grado 2, son tres  $C_3$  con una arista en común. Si tres vértices tienen grado 4 los otros dos tendrán grado 3 o más, por lo que debe ser grado 4 y solo es posible para  $K_5$ .

- (ii) Reflexiva, lo es pues todo grafo es subgrafo de si mismo.

Antisimétrica, también. Demostración 1: cada grafo de  $D$  está caracterizado por la cantidad de aristas que tienen. Los valores los 3 para  $C_3$ , 4 para  $C_4$ , 5, 6, 7 y 10. Llamemos  $G_1$  al grafo con 3 aristas,  $G_2$  al grafo con 4, etc, hasta  $G_6$ . Por la definición de la relación si  $GRG'$  entonces  $|EG| \leq |EG'| + 1$  por lo tanto si  $GRG'$  y  $G'RG$  a lo sumo difieren en una arista. Pero  $G_i$  nunca está relacionado con  $G_{i-1}$  pues 1) si sacamos una arista de  $G_i$  para  $i = 1, 2, 3$  obtenemos un grafo acíclico. 2) Si sacamos una arista de  $G_4$  quedará un vértice de grado 3 o 4, si sacamos una arista de  $G_5$  quedará un vértice de grado 3 o 4 y otro de grado 4, por último si sacamos una arista de  $G_6$  quedarán 4 vértices de grado 4.

Demostración 2: sea  $G'RG''$  y  $G''RG'$ . Distinguiamos cuatro casos. En lo que sigue si  $G = (V, E)$  entonces  $VG$  denota  $V$  y  $EG$  denota  $E$ .

Caso 1:  $G' \subseteq G'' \subseteq G'$ . Entonces  $VG' \subseteq VG'' \subseteq VG'$  y  $EG' \subseteq EG'' \subseteq EG'$ , por lo tanto  $VG' = VG''$  y  $EG' = EG'' \subseteq G'$ , de lo cual  $G' = G''$ .

Caso 2  $G'' \subseteq G'$ , pero existe  $e \in EG'$  tal que  $G' - e \subseteq G''$ . Entonces tenemos  $VG' \subseteq VG'' \subseteq VG'$  de lo cual  $VG' = VG''$ , y  $EG'' \subseteq EG'$  pero  $EG' - e \subseteq EG''$ , basta probar que  $e \in EG''$ .

Al eliminar  $e$  de  $G'$  aparecen dos vértices de grado impar, pero dichos vértices tiene grado par en  $G''$  y  $G' - e \subseteq G''$  así que deben ser incidentes con aristas que no están en  $G' - e$ . Pero como  $G'' \subseteq G'$ , dichas aristas deben estar en  $G'$ . Pero la única arista que está en  $G'$  pero no está en  $G' - e$  es la propia arista  $e$ .

Caso 3:  $G' \subseteq G''$ , pero existe  $e \in EG''$  tal que  $G'' - e \subseteq G'$ . Es igual al caso anterior cambiando  $G'$  por  $G''$ .

Caso 4: Existen  $e \in EG'$  y  $f \in G''$  tales que  $G' - e \subseteq G''$  y  $G'' - f \subseteq G'$ . Como antes, los vértices tienen que ser los mismos en ambos grafos. Respecto a las aristas, como  $EG' - e \subseteq EG''$  y

$EG'' - f \subseteq EG'$ , los conjuntos  $EG'$  y  $EG''$  difieren a lo sumo en  $e$  y  $f$ . Basta entonces demostrar que  $e$  está en  $G''$  y  $f$  en  $G'$ . Igual que antes,  $G' - e$  tendrá exactamente dos vértices de grado impar, pero los mismos tiene grado par en  $G''$ . Las aristas que los hacen pares no están en  $G' - e$ , por lo que pueden ser solamente  $e$  y/o  $f$ . Si es  $e$  habríamos demostrado que  $e \in EG''$ . Entonces solo puede ser  $f$ , uniendo ambos vértices, pero entonces  $e$  y  $f$  unirían los mismos vértices y serían la misma arista. Por lo tanto  $G' \subseteq G''$ , y por el caso anterior  $G' = G''$ .

Transitiva: no lo es pues los grafos  $(\{1, 2, 3\}, \{12, 23, 31\})$ ,  $(\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 23, 34, 41\})$  y  $(\{1, 5, 2, 3, 4\}, \{15, 52, 23, 34, 41\})$  están relacionados uno con el siguientes pero el primero no lo está con el último.

**EJERCICIO 10** Sea  $G$  un grafo simple con  $n$  vértices y  $q$  aristas, cuyos vértices tienen grado  $k$  ó  $k + 1$ .

- i) Demostrar que si  $G$  tiene  $n_k$  vértices de grado  $k$  entonces  $n_k = (k + 1)n - 2q$ .
- ii) Construir un árbol que cumpla con estas condiciones y tenga 2007 vértices.

SOLUCIÓN:

1. De la ecuación de los grados tenemos que  $kn_k + (k + 1)n_{k+1} = 2q$ , pero  $n = n_k + n_{k+1}$ , de donde  $kn_k + (k + 1)(n - n_k) = 2q$ , despejando obtenemos el resultado pedido.
2. Como todo árbol tiene alguna hoja,  $k$  tiene que ser 1. Además  $q = n - 1 = 2006$ . Por lo tanto  $n_1 = 2 \times 2007 - 2(2006) = 2$  y  $n_2 = 2007 - 2 = 2005$ . Hay un solo árbol con dichas características y éste es  $P_{2007}$ .