

MATEMÁTICA DISCRETA I - 2005. PRÁCTICO 3

Relaciones de Recurrencia

(1 semana)

Ejercicio 1 Sea $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ una sucesión que verifica la ecuación

$$a_n = 2a_{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

- Hallar a_3 si se sabe que $a_0 = 3$.
- Hallar a_0 si se sabe que $a_{10} = 1024$.
- Hallar $\lim a_n/2^n$ si se sabe que $a_0 = 3$.
- Hallar a_3 si se sabe que $\lim a_n/(2^n + 1) = 1$.
- Hallar $\lim a_n/(2^n + 3^n)$.
- Hallar a_3 si se sabe que $\lim a_n/(-2)^n$ existe (y es finito).

Aclaración: todos los límites son con $n \rightarrow +\infty$.

Ejercicio 2 Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones:

- $a_{n+1} - 1.5a_n = 0, \quad n \geq 0$
- $a_n - na_{n-1} = 0 \quad n \geq 1$
- $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0 \quad n \geq 2$
- (Exam. marzo 2001) $a_n/a_{n-1}^p = 2$ siendo $a_0 = 1, p$ positivo diferente de 1.

Ejercicio 3

Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geq 2,$
con $a_0 = 1, a_1 = 3$.
- $2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0, \quad n \geq 0,$
con $a_0 = 2, a_1 = -8$.
- $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1,$
con $a_0 = 7, a_1 = 3$.
- $a_{n+2} + a_n = 0, \quad n \geq 1,$
con $a_0 = 0, a_1 = 3$.
- $a_{n+2} + 4a_n = 0, \quad n \geq 1,$
con $a_0 = a_1 = 1$.
- $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2,$
con $a_0 = 5, a_1 = 12$.
- $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2,$
con $a_0 = 1, a_1 = 3$.
- $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0, \quad n \geq 0,$
con $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4$ y $a_3 = 37$
siendo b y c constantes desconocidas.

9. $a_{n+1} - a_n = 2n + 3, \quad n \geq 0, a_0 = 1.$
10. $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n, \quad n \geq 0, a_0 = 3.$
11. $a_{n+1} - 2a_n = 5, \quad n \geq 0, a_0 = 1.$
12. $a_{n+1} - 2a_n = 2^n, \quad n \geq 0, a_0 = 1.$
13. $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3^n, \quad n \geq 2,$
 $a_0 = 0, a_1 = 1$ (Exam. marzo 2001).
14. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 3 + 5n, \quad n \geq 0.$
15. (Parcial 2003) $a_n = 2a_{n-1} + n2^n \quad \forall n \geq 1.$ y $a_0 = 1.$

Ejercicio 4 (Parcial 2001) Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n \quad \forall n \geq 2.$$

Hallar α, β y a_{100} Sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17.$

Ejercicio 5 Expresa a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leq n - 1$) siendo a_n :

1. La cantidad de saludos que se dieron los primeros n invitados de una reunión, si cada vez que llego uno, éste saludo el resto.
2. El número de secuencias de 0s y 1s de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.
3. (Exam. marzo 2001) El número de secuencias de As, Bs y Cs de largo n en las cuales no aparecen ni dos As seguidas.
4. Cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se puede a veces saltar un escalón.
5. Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea)
6. El número de formas en que una sucesión de 1s y 2s suman n . Por ejemplo para $n = 3$ serían las sucesiones 111, 12 y 21.
7. El determinante de la matriz A de $n \times n$ que tiene 2s en la diagonal, 1s en las diagonales inferior y superior y cero en el resto de las entradas. ($(A)_{i,j} = 2$ si $i = j, 1$ si $|i - j| = 1$ y 0 en los otros casos).

Ejercicio 6

Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar cuántas son las banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

1. no hay restricciones sobre el color de cada franja.
2. Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
3. Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

Ejercicio 7 (Primer Examen curso 2003) Sea a_n una sucesión tal que

$$a_{n+4} - 5a_{n+2} + 6a_n = 0, \quad a_0 = 3, a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9.$$

Calcular a_{1000} . **Indique la opción correcta:**

- (A) $2^{1001} + 3^{1000}$.
- (B) 2003.
- (C) $(\sqrt{2})^{1000} + 3(-\sqrt{2})^{1000} - 5(\sqrt{3})^{1000} + (-\sqrt{3})^{1000}$.
- (D) $2^{501} + 3^{500}$.
- (E) $2^{1000} + 2.3^{1000}$.

Respuestas

Ejercicio 1:

- a) $a_3 = 24$
- b) $a_0 = 1$
- c) $\lim \frac{a_n}{2^n} = 3$
- d) $a_3 = 8$
- e) $\lim \frac{a_n}{2^n + 3^n} = 0$
- f) $a_0 = 0$

Ejercicio 2:

- $a_n = a_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n$;
- $a_n = a_0 \cdot n!$;
- $a_n = a_1 \cdot \frac{1}{n}$;
- $a_n = 2^{\frac{p^n - 1}{p - 1}}$

Ejercicio 3:

1. $a_n = 3^n$
2. $a_n = -2.5^n + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. $a_n = 4 + 3 \left(\frac{-1}{3}\right)^n$
4. $a_n = -3 \cdot (i^{n+1} + (-i)^{n+1}) / 2$
5. $a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right) \cdot (2i)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right) \cdot (-2i)^n$
6. $a_n = 5.3^n - n.3^n$
7. $a_n = \left(\frac{1}{2} - 2i\right) \cdot (-1 + i)^n + \left(\frac{1}{2} + 2i\right) \cdot (-1 - i)^n$
8. $a_n = \frac{1}{10} \cdot 7^n - \frac{1}{10} \cdot (-3)^n$
9. $a_n = n^2 + 2n + 1$
10. $a_n = n^3 - 2n^2 + n + 3$
11. $a_n = 3.2^{n+1} - 5$
12. $a_n = (n + 2) \cdot 2^{n-1}$
13. $a_n = 2^{n+3} + (3n - 8) \cdot 3^n$
14. $a_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + n^3 \left(\frac{5}{24} - 3/4\right)$
15. $a_n = (2 + n + n^2)2^{n-1}$

Ejercicio 4:

$$\alpha = 1, \beta = -2, a_{100} = 1$$

Ejercicio 5:

1. $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}, a_0 = 1$

2. $a_n = a_{n-1} + n - 1, a_1 = 0$
3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_1 = 2, a_2 = 3$
4. $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ con $a_1 = 3, a_2 = 8$.
5. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_1 = 1, a_2 = 2$
6. $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}, a_1 = 1, a_2 = 2$
7. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_1 = 1, a_2 = 2$
8. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, a_1 = 2, a_2 = 3$

Ejercicio 6:

1. $a_n = 4^n$ porque $a_n = 4a_{n-1}$ y $a_1 = 4$
2. $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ porque $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$ y $a_1 = 4$
3. $a_n = 3^n + 3(-1)^n, n \geq 2$ porque $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \forall n \geq 4, a_2 = 12, a_3 = 24$

Ejercicio 7: $a_{1000} = 2 \cdot 2^{500} + 3^{500}$