

MATEMÁTICA DISCRETA I - CURSO 2005.

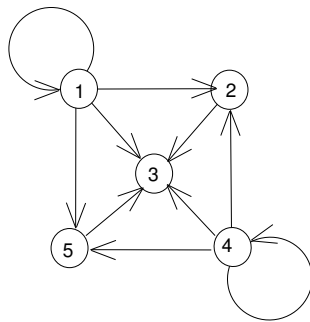
Práctico 5: Relaciones.

(3 clases)

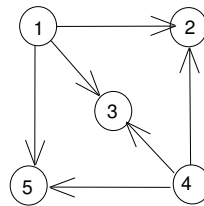
Aclaración: En todos los ejercicios R^{-1} denota la relación inversa, i.e. $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$, y \bar{R} la relación complementaria, i.e., $\bar{R} = \{(x, y) : (y, x) \notin R\}$

Ejercicio 1 Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas ($\forall x, (x, x) \notin R$), simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

- (a) $\{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4)\}$.
- (b) $\{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4)\}$.
- (c) $\{(1, 3); (1, 1); (3, 1); (1, 2); (3, 3); (4, 4)\}$.
- (d) \emptyset .
- (e) $A \times A$.
- (f) y (g) Las relaciones cuyos grafos dirigidos son:



(f)



(g)

(h) y (i) Las relaciones cuyas matrices son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(h) (i)

Ejercicio 2 (Parcial 2000) Halle el número de relaciones R en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$. Construya la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

Ejercicio 3 ¿Cuántas relaciones binarias (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) asimétricas, (d) antisimétricas son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 4 Sea P la Humanidad (i.e. el conjunto de seres humanos que existen y existieron alguna vez). Considere las relaciones en P :

- xR_1y si x es hijo de y ;
- xR_2y si x es hermano de y ;

Describa las relaciones:

- (a) R_1^2, R_1^3, R_2^2 y R_2^3 .
- (b) $R_i \circ R_j$, i, j distintos.
- (c) $R_i \circ R_j \circ R_k$, para todos los posibles i, j, k .
- (d) $(R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (R_1 \cup R_1^{-1})^2 \cup (R_1 \cup R_1^{-1})^3 \cup \dots$
- (e) Ídem anterior para R_2 .

Ejercicio 5 Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

- (a) Elabore un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R .
- (b) Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también \bar{R} , R^{-1} , $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?
- (c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas*, *irreflexivas*, *antisimétricas*, *asimétricas* y *transitivas*.

Ejercicio 6 (Parcial 2001) Sea R una relación *compatible* sobre un conjunto no vacío A , es decir, R es reflexiva y transitiva. Considere las relaciones R^{-1} y $S = (R \circ R^{-1}) \cup (R^{-1} \circ R)$. Indique la opción correcta:

- (A) R^{-1} es compatible, S es simétrica y $R \subseteq S$.
- (B) R^{-1} no es compatible, S no es simétrica y $R \not\subseteq S$.
- (C) R^{-1} es un orden parcial y S es irreflexiva.
- (D) R^{-1} es compatible y S no es simétrica y $R \not\subseteq S$.
- (E) R^{-1} no es compatible y S es simétrica y $R \subseteq S$.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Ejercicio 7 Sea n un entero positivo. Definamos la relación \equiv en \mathbb{Z} , llamada congruencia módulo n , en la forma:

$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ es divisible por } n.$$

- (a) Pruebe que \equiv es una relación de equivalencia.
- (b) Demuestre que $a \equiv b \iff a$ y b dan el mismo resto al ser divididos por n .
- (c) Describa el conjunto cociente \mathbb{Z}/\equiv cuando $n = 3, 2, 1$.
- (d) Pruebe que $|\mathbb{Z}/\equiv|$ tiene n elementos.

Ejercicio 8 Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea R_n el número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Pruebe que:

- (a) para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple,

$$R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \dots + C_n^n R_0.$$

- (b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple,

$$R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, n).$$

Ejercicio 9 En cada uno de los siguientes casos, pruebe que R es una relación de equivalencia en A y describa el conjunto cociente A/R :

- (a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.
- (b) (Parcial 2000) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.
- (c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^4 y b^4 dan el mismo resto al dividirlos por 5.
- (d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

RELACIONES DE ORDEN.

Ejercicio 10 Considere el conjunto de propiedades $P = \{ \text{reflexiva, antisimétrica, transitiva} \}$. Para cada subconjunto T de P , exhiba un ejemplo de una relación que satisfaga las propiedades de T y no satisfaga las de $P \setminus T$.

Ejercicio 11 Para ensamblar cierto producto hay que realizar las 11 tareas T_1, T_2, \dots, T_{11} en el siguiente orden parcial:

Escriba una lista de instrucciones de modo tal que, al ejecutarlas según la lista, el resultado final sea el producto correctamente ensamblado.

Ejercicio 12 Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas P_0, P_1, \dots, P_9 que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_9 > P_7, P_2; P_7 > P_6; P_6 > P_4; P_2 > P_8, P_5; P_5 > P_3, P_0; P_8 > P_3, P_4; P_3, P_4, P_0 > P_1$; donde, por ejemplo, $P_i > P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j . Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

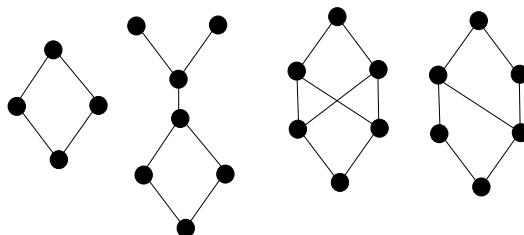
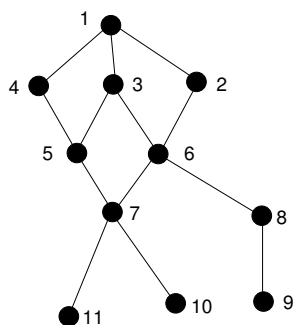


Figura 1:

Ejercicio 13 ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la figura ?? representa un retículo?

Ejercicio 14 Demuestre que si A es un conjunto finito y \leq es un orden en A entonces A tiene algún elemento maximal y alguno minimal. Demuestre también que si (A, \leq) es un retículo (látice) y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo. ¿Es cierto alguno de estos resultado si A es infinito? (en caso afirmativo de una demostración y en caso negativo un contraejemplo).

Ejercicio 15 Para cada uno de los órdenes (A, \leq) siguientes, dibuje el diagrama de Hasse y determine si se trata de un retículo:

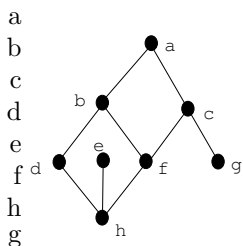
- (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y \leq es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).
- (b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y \leq es la inclusión \subseteq .

Ejercicio 16 Sea A el conjunto de naturales n mayores que 1 que dividen a 60. Sea R la relación en A definida por: aRb si a divide a b . ¿Es R un orden parcial? ¿total? ¿retículo? Halle todos los elementos maximales y minimales de (A, R) . ¿Cuál es el cardinal más grande de una cadena en (A, R) ? ¿Y el de una anticadena? ¿Cuántas cadenas de largo 2 hay?

Ejercicio 17 Muestre que en un conjunto con 61 personas, o bien hay una sucesión de 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente, o bien hay un grupo de 6 personas ninguna de las cuales es descendiente de alguna otra.

Ejercicio 18 (Ej 2 del 1er Parcial del 2001)

Se considera el siguiente diagrama de Hasse correspondiente a un orden parcial R definido en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta:



(I) (A, R) es un retículo (*lattice*).

(II) El elemento a es un máximo; g y f son minimales.

(III) Existen exactamente 7 cadenas de cardinal 3, una de las cuales es $\{a, b, h\}$.

SUPLEMENTARIOS

Ejercicio 19 Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

- (a) La composición de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.
- (b) La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.
- (c) La composición de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea.

Ejercicio 20 (a) Halle el número de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2); (3, 4)\}$.

(b) Idem para relaciones de orden.

Ejercicio 21 Sea $A = \{1, 2, \dots, 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A ?

Ejercicio 22 Sea A un conjunto y R una relación transitiva y reflexiva en A . Considere la relación en A definida por $S = R \cap R^{-1}$. Pruebe que S es una relación de equivalencia y que

$$[a]T[b] \text{ si } aRb$$

define una relación de orden en el conjunto cociente A/S .

Ejercicio 23 (parcial 2000) Sea M el conjunto de todas las matrices reales $n \times n$. Pruebe que la relación \sim en M definida por:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{existe } P \in M \text{ invertible tal que } B = PAP^{-1}$$

es de equivalencia. Halle la clase de la matriz nula y la clase de la matriz identidad.

Ejercicio 24 (Ej1 2do Examen del curso 2001) Sea R una relación binaria sobre un conjunto con 3 elementos, cuya matriz de 0s y 1s es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & y \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta?:

- (I) R es una relación de equivalencia si y solo si $x = y = z = w = 1$.
- (II) Si R es un retículo entonces $y + w \geq 1$.
- (III) Para cualquier valor de x, y, z y w la relación R es necesariamente un orden parcial.