

MATEMÁTICA DISCRETA I - 2005. PRÁCTICO 8  
**Grafos: Planaridad y coloración** (3 clases)

ACLARACIONES Y DEFINICIONES

**Ejercicio 1** Dibuje una inmersión en el plano de  $K_4$ , otra del cubo y otra de  $K_{2,8}$ .

**Ejercicio 2** Indique cuales de los multigrafos de la Figura 1 son homeomorfos:

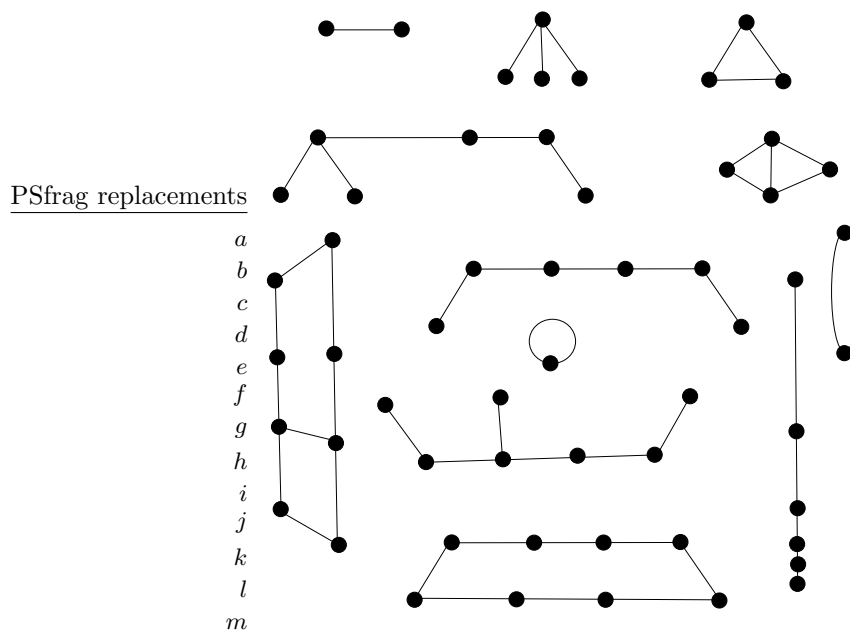


Figura 1:

**Ejercicio 3** Para los pares de grafos homeomorfos de la Figura 2 obtenga un tercero desde el cual los dos primeros se obtengan por subdivisiones elementales.

- Ejercicio 4** a) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a  $K_2$  tiene  $C_4$ ?  
 b) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a  $K_{1,3}$  tiene  $W_4$ ?  
 c) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a  $K_2$  tiene un árbol de orden  $n$ ?

**Ejercicio 5** Muestre que si se elimina cualquier arista de  $K_5$ , el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo  $K_{3,3}$ ?

**Ejercicio 6** Determine cuáles de los grafos de la Figura 3 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a  $K_5$ , o  $K_{3,3}$ .

**Ejercicio 7** Sea  $G = (V, E)$  un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener  $|E|$ ?

**Ejercicio 8** Determine el número de vértices, aristas y regiones para cada uno de los grafos planos de la Figura 3. Luego muestre que sus respuestas satisfacen el teorema de Euler para grafos planos conexos.

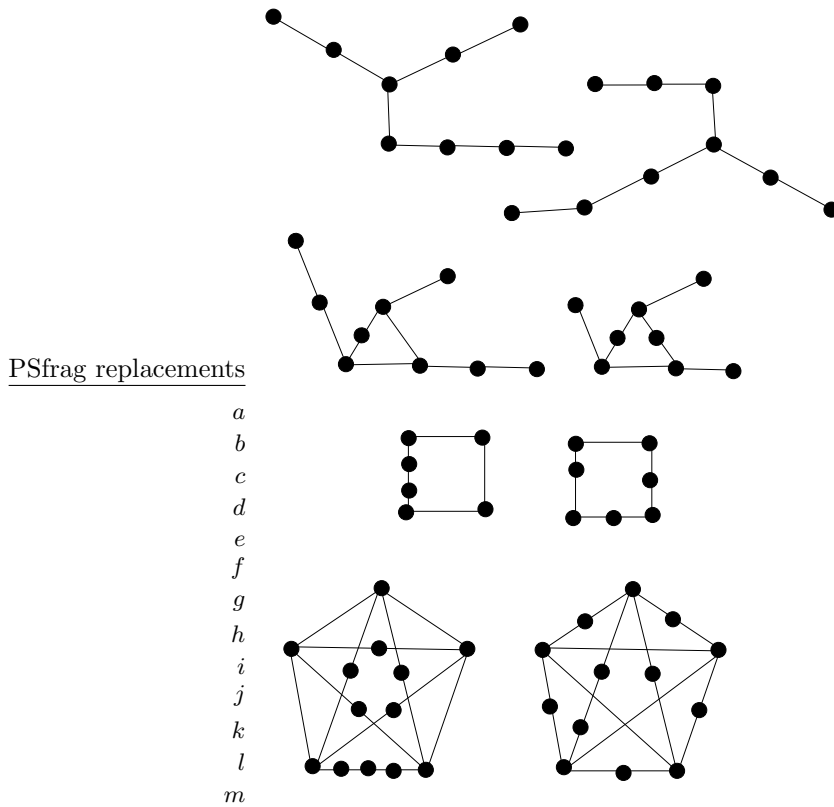


Figura 2:

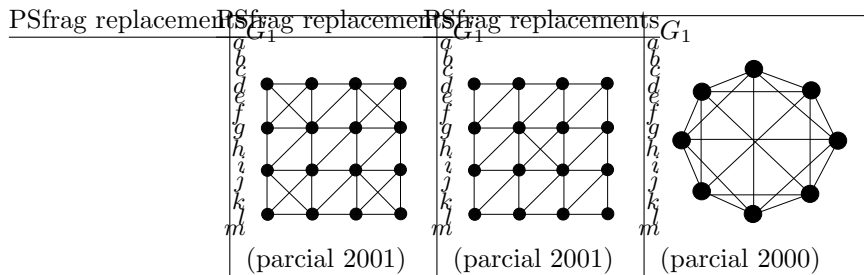


Figura 3:

**Ejercicio 9** Sea  $G = (V, E)$  un grafo plano 4-regular conexo sin lazos. Si  $|E| = 16$ , ¿cuántas regiones hay en una representación plana de  $G$ ?

**Ejercicio 10** Suponga que  $G = (V, E)$  es un grafo plano con  $k$  componentes conexas sin lazos con  $|V| = v, |E| = e$ . Establezca y demuestre una extensión del teorema de Euler para este grafo.

**Ejercicio 11** a) ¿Cuántas aristas tiene un grafo conexo 3-regular plano sin lazos y con ocho vértices?,  
b) Dibuje un grafo que satisfagan las condiciones de la parte anterior y otro que las satisfaga todas menos la de ser plano.

**Ejercicio 12** Sea  $G = (V, E)$  un grafo plano y cuyas inmersiones planas determinan 53 regiones. Si para alguna inmersión plana de  $G$  cada región tiene al menos cinco aristas en su frontera, demuestre que  $|V| \geq 82$ .

**Ejercicio 13** a) Demuestre que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.  
b) Demuestre que todo grafo plano con menos de 30 aristas tiene un vértice de grado 4 o menor.  
c) Demuestre que en toda inmersión de un grafo plano y conexo con 6 vértices y 12 aristas, cada una de las regiones está limitada por 3 aristas.  
d) Demuestre que para todo grafo conexo  $G$  con 11 o más vértices, o bien él o su complemento  $\overline{G}$  no es plano.

## COLORACIONES

**Ejercicio 14** Encuentre el número cromático de los siguientes grafos.

- a) El grafo bipartito completo  $K_{m,n}$ .
- b) El ciclo  $C_n$ .
- c) Los grafos de Figura 4.

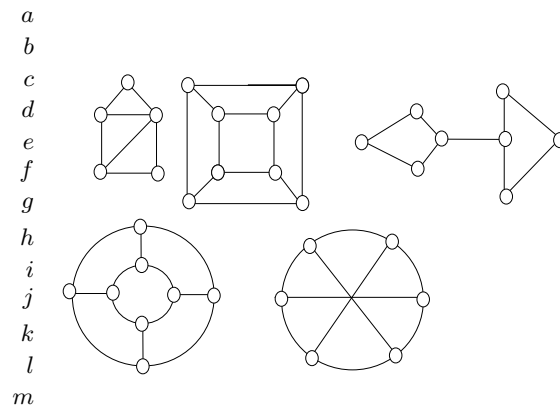


Figura 4:

- Ejercicio 15** a) Pruebe que si  $\chi(G) = 2$  entonces  $G$  no tiene ciclos impares.  
 b) Pruebe que si  $G$  no tiene ciclos impares entonces  $\chi(G) = 2$ .

**Ejercicio 16** En los laboratorios químicos JJ, Juanita recibe tres embarques que contienen un total de siete sustancias químicas diferentes. Así mismo, la naturaleza de estas sustancias es tal que para todo  $1 \leq i \leq 5$ , la sustancia  $i$  no puede almacenarse en el mismo compartimiento que la sustancia  $i+1$  o la  $i+2$ . Determine el menor número de compartimientos separados que Juanita necesitará para almacenar en forma segura estas siete sustancias.

- Ejercicio 17** a) Determine  $P(K_{1,3}, \lambda)$ .  
 b) ¿Cuál es el polinomio cromático de  $K_{1,n}$ ? ¿Cuál es su número cromático?  
 c) ¿Cuáles son los polinomios cromáticos de  $P_n$ ?  
 d) ¿Cuál es el polinomio cromático de un árbol con  $n$  nodos?  
 e) A partir de la parte anterior encuentre el número cromático de un árbol con  $n$  nodos.

**Ejercicio 18** Hallar el polinomio cromático de  $K_{2,n}$ .

- Ejercicio 19** a) Determine los polinomios cromáticos para los grafos de la Figura 5.  
 b) Encuentre  $\chi(G)$  para cada grafo.  
 c) Si se dispone de cinco colores, ¿cuántas coloraciones propias de los vértices de cada grafo existen?

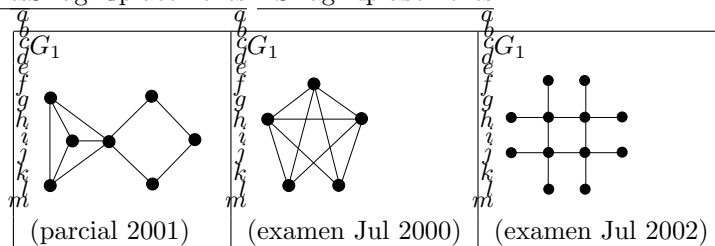


Figura 5:

**Ejercicio 20** (Examen Feb 2002) Sea  $G$  un grafo con 5 vértices cuyo polinomio cromático evaluado en 4 vale 0, esto es

$$P(G; 4) = 0.$$

**Indique la opción correcta**

- (A)  $G$  posee dos aristas  $e$  y  $f$  incidentes, tales que si  $H = G - e - f$ , entonces  $P(H; 4) = 48$ .
- (B)  $G$  no posee aristas incidentes.
- (C)  $G$  posee dos aristas  $e$  y  $f$  incidentes, tales que si  $H = G - e - f$ , entonces  $P(H; 4) = 47$ .
- (D)  $G$  posee dos aristas  $e$  y  $f$  incidentes, tales que si  $H = G - e - f$ , entonces  $P(H; 4) = 46$ .
- (E) Ninguna de las anteriores.