Matemática Discreta I - 2007. Práctico 6

Grafos: camino, camino simple y conexión

(2 clases)

Algunas definiciones

Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin artistas múltiples ni lazos. El grafo *completo* K_n tiene n vértices todos unidos entre si. El *bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n+m$ vertices n de los cuales están unidos a los otros m, y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* P_n tiene n vértices y todo él es un camino simple. El *n–ciclo* C_n tiene n vértices y todo él es un ciclo. El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1. Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos.

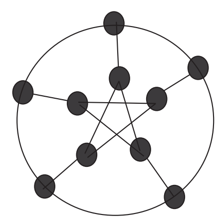

Figura 1:

La *distancia* entre dos vértices a y b de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. Por ejemplo, la distancia entre el vértice ç" y el vértice "m" del grafo de la Figura 3 es 2. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de P_4 es 3 y el de C_5 es 2.

Ejercicio 1 ((2do examen 2003) Hallar el mínimo número de aristas que hay que quitarle a K_6 para que quede desconectado en 2 componentes conexas ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

Ejercicio 2 Para el grafo de la Figura 2, determine:
a) Un camino $b-d$ que no sea un recorrido.
b) Un recorrido $b-d$ que no sea un camino simple.
c) Un camino simple $b-d$
d) Un camino cerrado $b-b$ que no sea un circuito.
e) Un circuito $b-b$ que no sea un ciclo
f) Todos los ciclos $b-b$
g) Todos los caminos simples $b-f$

Ejercicio 3
a) ¿Cuál es la distancia entre d y los demás vértices del grafo de la Figura 3?
b) Hallar el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y el grafo de Petersen.

Ejercicio 4 Determine si se cumple o no que K_4 contenga:
a) Un camino que no es un recorrido.
b) Un recorrido que no es ni un circuito ni un camino simple.

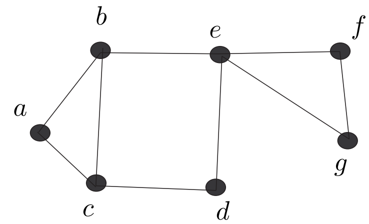

Figura 2:

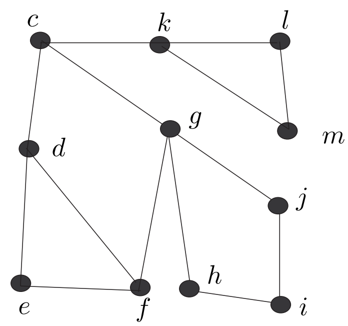

Figura 3:

c) Un circuito que no es un ciclo.

Ejercicio 5 ¿Cuántos caminos simples tiene P_4? ¿y $K_{1,4}$? ¿y P_n? ¿y $K_{1,n}$?

Ejercicio 6 (1er parcial-examen 2002) Sea K_{12} el grafo completo con exactamente 12 vértices. ¿Cuántos caminos simples de longitud 2 tiene K_{12}?

Ejercicio 7 ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4?

Ejercicio 8 Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de n rayos* como el grafo W_n con $n+1$ vértices v_0, v_1, ..., v_n tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y $v_1, \ldots, v_n, v_1$ es un ciclo. En la Figura 4 se muestra W_3, W_4 y W_5.

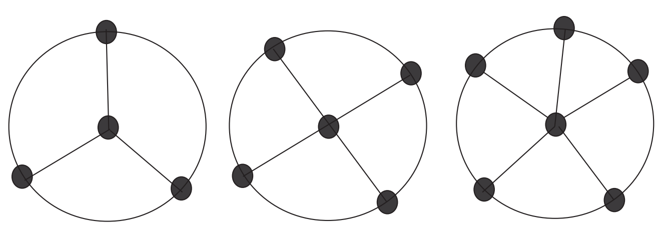

Figura 4:

a) ¿Cuántas aristas tiene W_n?
b) ¿Cuántos ciclos de longitud 3 tiene W_3? ¿y W_4?
c) ¿Cuántos de longitud 4 tienen W_3, W_4 y W_5?
d) Ídem para ciclos de longitud 5.
e) Ídem para ciclos de longitud 6.
f) Determine cuantos ciclos de longitud k tiene W_n.

Ejercicio 9 Pruebe que si P y Q son dos caminos simples de longitud la mayor posible, en un grafo conexo, entonces tienen un vértice en común.

Ejercicio 10 Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{\ 1,\ 2,\ \ldots,15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

Ejercicio 11 Se espera que un hombre traslade un perro, una oveja y una bolsa de repollos a través de un río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar solo al perro con la oveja ni a la oveja con la bolsa de repollos. ¿Cómo se podrá hacer?

Ejercicio 12 ¿Cuántas aristas tiene un árbol con n vértices?

Ejercicio 13 Demostrar que la cantidad de componentes conexas de un grafo con n vértices y m aristas es mayor o igual a $n - m$.

Ejercicio 14 De un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértices más que el número de aristas.

Ejercicio 15 (parcial 2001) Sea G un grafo acíclico, con n vértices y k componentes conexas. Entonces
(A) G tiene $n - k$ aristas.
(B) G tiene $n + k - 1$ aristas.
(C) G tiene $k(n - 1)$ aristas.
(D) G tiene $n - 2k + 1$ aristas.
(E) Faltan datos para determinar el número de aristas de G.

Ejercicio 16 ((2do examen 2003) Hallar el máximo número de aristas que puedo quitarle a K_6 sin que el grafo deje de ser conexo.

Ejercicio 17 Sea G_n el grafo con vértices las n-uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto, e.g. en G_n, $(0, 0, 1)$ es adyacente a las $(1, 1, 1)$ y a $(1, 0, 0)$, pero no a $(1, 1, 0)$.
a) Dibuje G_2, G_3 y G_1.
b) Para que valores de n es G_n conexo.
c) ¿Cuántas componentes conexas tiene G_n?

Ejercicio 18 (Examen marzo 2001) El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.
a) Hallar los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibujar dichos grafos.
b) ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?
c) Hallar 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.
d) Demuestre que H_n no tiene 3–ciclos.
e) ¿Cuántos 4–ciclos tiene H_n?

Sugerencias

Ejercicio 11 Asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.
Ejercicio 13 Proceda por inducción en m o si quiere en n. Otra forma es considerando un árbol recubridor para cada componente conexa del grafo.
Ejercicio 17 b) sume los 1s de cada vértice.
Ejercicio 18 e) considere un vértice fijo y cuente cuantos 4–ciclos pasan por él.