MATEMÁTICA DISCRETA I - 2007. PRÁCTICO 7

Grafos: subgrafo, subgrafos inducidos y recubridores.
Isomorfismos y grafo complemento.
Grado y grafos regulares.
Recorridos y circuitos eulerianos y ciclos hamiltonianos.

(3 clases)

ACLARACIONES Y DEFINICIONES

Todos los grafos de este práctico se suponen simples, es decir, sin aristas múltiples.
Un vértice es *aislado* si no es adyacente a ningún otro.
El *grafo complemento* $\bar{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\bar{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
Un grafo G se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\bar{G}$.
Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos vértices disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), entonces su *grafo unión* $G_1 \cup G_2$ se define como $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
$\kappa(G)$ es la cantidad de componentes conexas de G.
Un grafo se dice *k–regular* si todos sus vértices tiene grado k. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1.

EJERCICIOS

Ejercicio 1 Sea G el grafo de la Figura 1 (a).
a)¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
b) Describa el subgrafo G_1 de G (Figura 1 (b)) como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G.
c) Ídem para el subgrafo G_2 (Figura 1 (c)).
d) Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.
e) Sean e_1 y e_2 las artistas $\{a, c\}$ y $\{a, d\}$ respectivamente del grafo G. Trace los siguientes subgrafos de G: (i) $(G-e_1)-e_2$; (ii) $(G - e_2) - e_1$; (iii) $G - \{e_1, e_2\}$.

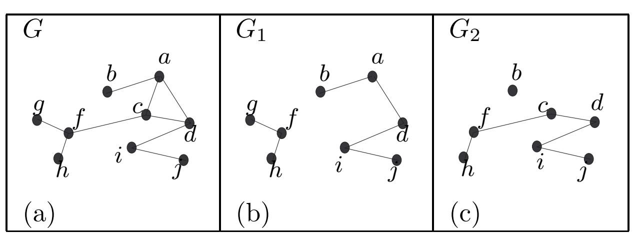

Figura 1:

f) Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.

g) ¿Qué condición o condiciones debe cumplir un subgrafo para no ser inducido?
h) ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G?
i) ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?
j) ¿cuántos subgrafos de la parte h) tienen el vértice a como vértice aislado?

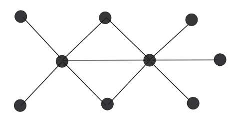

Figura 2:

Ejercicio 2 Encuentre un grafo G que tenga dos vértices u y v tales que

$$\kappa(G-u)=\kappa(G) \qquad \kappa(G-v)>\kappa(G)$$

Ejercicio 3 Encuentre todos los árboles no isomorfos con 6 vértices.

Ejercicio 4 (2do parcial 2001) Hallar el número de subgrafos conexos recubridores no isomorfos del grafo de la Figura 2.

Ejercicio 5 Para cada par de grafos de la Figura 3 determine si los grafos son o on isomorfos

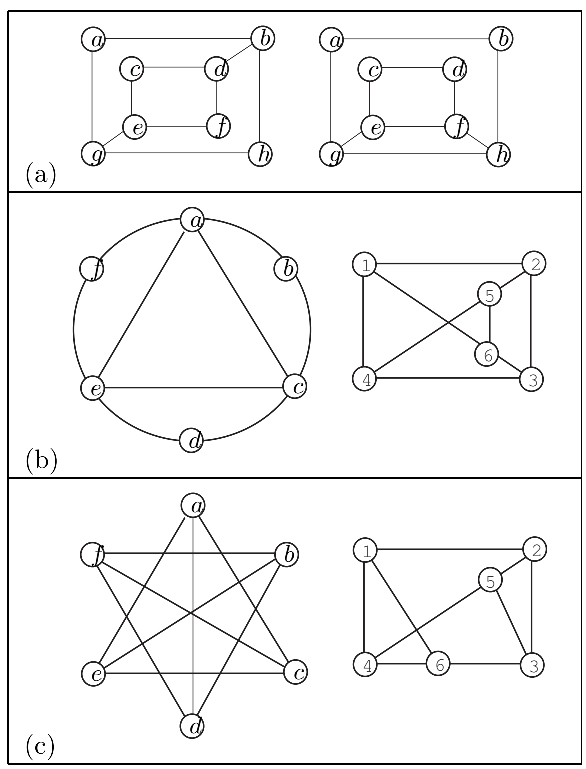

Figura 3:

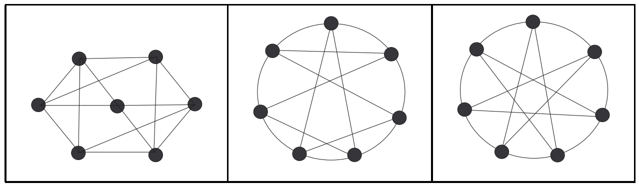

Figura 4:

Ejercicio 6 a) Demuestre que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.
b)(2do parcial curso 2000) ¿Cuáles de los grafos de la Figura 4 son isomorfos?
c) Determine el número de aristas de $\bar{G}$ en función del número de aristas de G.
d) Determine el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden n.
e) Construya un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.
f) Determine para que valores de n existe un grafo autocomplementario de orden n.

Ejercicio 7 Pruebe que K_n posee tres subgrafos dos a dos isomorfos y arista disjuntos si y solo si n es de la forma $3k$ o $3k+1$.

Ejercicio 8 a) Hallar el grado de cada vértice del grafo de la Figura 2.
b) ¿Cuántas aristas tiene dicho grafo?
c) ¿Cuántos vértices de grado impar tiene?

Ejercicio 9 a) Determine el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.
b) Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.
c) ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 10 En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 11 Sea G un grafo con n vértices. ¿Cuántos vértices de $\bar{G}$ tienen grado par si G tiene un sólo vértice de grado par?

Ejercicio 12 a) ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?
b) ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

Ejercicio 13 Para todo natural par $n \geq 4$ construya un grafo conexo 3–regular con n vértices.

Ejercicio 14 Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 15 ¿Cuántas hojas tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5 ? (hojas = vértices colgantes)

Ejercicio 16 Hallar un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 5 o demuestre que no existe.

Ejercicio 17 Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 18 a) Determine los valores de n para los que el grafo completo K_n tiene un circuito euleriano.
b) ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

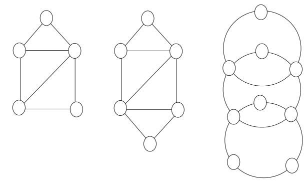

Figura 5:

Ejercicio 19 Encuentre la longitud máxima de un recorrido en
a) K_6; b) K_8; c) K_{10}; d) K_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 20 Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dé un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

Ejercicio 21 Encuentre un ciclo hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 6.

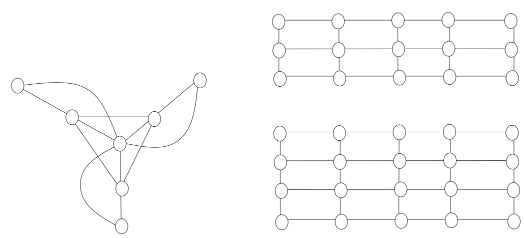

Figura 6:

Sugerencias

Ejercicio 6 f) Demuestre que n debe ser de la forma $4k$ o $4k+1$. Para $n = 4k$, generalice la estructura del grafo autocomplementario de orden 4 agrupando los vértices en cuatro grupos. Para $n = 4k+1$ agregue un vértice al grafo anterior y únalo en forma adecuada.